数学小丛书——智慧之花

（5）

登山·赝币·红绿灯

丁石孙　主编

北京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

登山·赝币·红绿灯/丁石孙主编. --北京:北京大学出版社,1997.10

(数学小丛书——智慧之花;5)

ISBN 7-301-03404-0

Ⅰ. 登… Ⅱ. 丁… Ⅲ. 数学-普及读物 Ⅳ. 01-49

书　　　名:登山·赝币·红绿灯

著作责任者:丁石孙　主编

责 任 编 辑:王　艳

标 准 书 号:ISBN 7-301-03404-0/O·394

出　版　者:北京大学出版社

地　　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

电　　　话:出版部 62752015　发行部 62559712　编辑部 62752032

排　印　者:北京大学印刷厂

发　行　者:北京大学出版社

经　销　者:新华书店

787mm×1092mm　32 开本　7.75 印张　170 千字

1997 年 10 月第一版　1997 年 10 月第一次印刷

印　　　数:0 001—3 000 册

定　　　价:10.50 元

写在前面的话

在一个人所受的基础教育中，数学一直是占着一个特殊地位的，它占用的时间可以说是最多的. 也许因为这已是历史上长期以来形成的事实，所以很少有人去作说明，即使有的学生并不喜欢数学，也鼓不起勇气去问个为什么.

数学由于其特殊的形式，给人的印象常常是：一批口诀，一堆公式以及一串定理，但它们在解决生活及其他学科的问题时又是很有用的，于是多数人就硬着头皮按老师教的学下去. 这样的理解至多对了一半，因为数学还有另一个方面的重要作用，这就是通过对数学知识的介绍，对数学问题的解决，教会人们一种重要的分析问题，解决问题的思想方法. 简单地讲，数学要教会人如何进行逻辑推理，如何进行正确的抽象思维，如何在纷繁的事物中抓住主要的联系，并如何使用明确的概念，等等.

要正确发挥数学课程的教育功能，除去需要教师与学生的积极努力以外，也还需要找到适当的辅助材料和恰当的方法. 我们选编这套《数学小丛书——智慧之花》就是为了从这个方面为数学老师（主要是中学的老师）和大学生提供一点帮助，有一部分也可以用作中学生的课外读物.

我们并不认为目前的数学教学大纲的内容太少，太浅，因而要增加或加深教学内容. 我们更不想给学生增加习题量以应付考试. 恰恰相反，我们认为再向这个方向发展将会造成极大的危害. 通过我们选择的这些小文章，我们希望能帮助读者

对数学有更全面的了解，使大家发现数学不只是“定义、定理、公式、证明”的刻板叙述，而是生动活泼、引人入胜的思维训练. 在这里，读者可以看到如何对各种各样的问题进行精细的分析，又如何逐步把复杂的问题理出头绪，最后给出清晰的答案. 总之，我们希望通过千姿百态的分析与讨论帮助读者了解什么是大家应该从数学学习中学到的思想方法.

我们的目标是这样，但能否达到还有待于实践的检验. 读者读过这些书之后的印象与收获将作出评判. 我们希望大家多提批评意见，帮助我们不断改进我们的工作.

丁石孙

1989 年 2 月

出 版 说 明

现代数学，这个最令人惊叹的智力创造，已经使人类心灵的眼光越过无限的时间，使人类心灵的手延伸到了无边无际的空间.

——N. M. Butler

数学方法渗透进并支配着一切自然科学的“理论”分支.在现代经验科学中，它已越来越成为衡量成就的主要标准.

——J. von Neumann

参与开发一般智力——不是为了今后某一职业的特定需要，应看成是数学教育的基本目标.

——F. Reidt

别把数学想像得那么困难和艰涩，并认为它排斥常识，数学仅仅是常识的一种微妙的形式.

——L. Kelvin

这些著名学者的话表达了我们出版《数学小丛书——智慧之花》的想法和努力的目标.

本丛书的主要对象是：中学数学教师、数学各专业的低年级大学生、部分高中学生以及数学爱好者.所选内容力求生动、有趣，在开始阶段以翻译为主，一年 2～3 册.

我们希望本丛书能为活跃与推动中学与大学低年级的数学教学、提高中学教师和大学生的数学素质、更好地沟通中学数学与大学数学以及普及数学知识，做一点有益的工作.

我们水平有限，希望大家多提意见，为了让我们的小花开放得绚丽多姿而共同努力！

《数学小丛书——智慧之花》编委会
1989 年 2 月

目　录

锁、钥匙和投票表决[①]

Donald McCarthy

下列组合问题出现在 A. M. Yaglom 和 I. M. Yaglom 的名著《具有初等解法的挑战性数学问题》[4]中,并且是组合学的主要教材之一,C. L. liu 的《组合学引论》[1]中的一例.

> 在秘密发射场工作的 11 位科学家组成一组,他们的资料要锁在保险柜中.只有该组的多数人在场时,保险柜才能打开.因此保险柜上锁着许多把不同的锁,每位科学家持有这些锁的一些钥匙.问总共应需要多少把不同的锁,以及每位科学家要有多少把不同的钥匙.

这个趣味问题的答案是总共需要 462 把锁,以及每位科学家必须要有 252 把钥匙.这两个数字的含义是 $462=\binom{11}{5}$ 和 $252=\binom{10}{5}$.该问题的解法出现在[4]中.它的一般提法是:"若有 n 位科学家,并且要求至少有 m 位科学家同时在场时,保险柜才能打开.那么保险柜上锁的最小数是$\binom{n}{m-1}$,以及每位科学家持有钥匙的最小数是$\binom{n-1}{m-1}$.这也就表明,这种保险柜的装钥系统是不实用的,因为即使当 n 和 m 都不太大时,为打开保险柜所用的时间也要一整天."

---

① 编译自"Locks, Keys and Majority Voting", *Mathematics Magazine* Vol. **52**, No. **3**, May 1979.

在以前的一个班级上，当我讲完这个漂亮的结果时，当场就遭到一位学生的反对. 他说他确信，一定有办法用较少的锁来办到这件事. 虽然他最初的反对只是基于某些主观臆断，然而他所说的竟然是对的！为了使锁的数目减少，曾产生过几种精巧安排锁的设计方案，但都失败了. 可是这种追求终于导致了更为简单的和令人意想不到的关于这个问题的解答，它的答案竟然只需要很少的锁和钥匙. 在讲解这个"实用的"解答之前，我觉得有必要讲一下"不实用的"解答的美妙的推理过程，然后再运用一个实例来让我们理解这其中的缘故. 最后指出，我们的讲法比[1]和[4]的讲法更少形式化.

假定有 n 位科学家组成的小组，至少要有 m 位科学家同时在场时才能打开保险柜(为了去掉毫无意义的情况，我们假定 $1\leqslant m\leqslant n.$). 设 L 是所需的最少的锁数，并设 K 是每位科学家持有的最少的钥匙数. 我们要证明的是 $L=\binom{n}{m-1}$ 和 $K=\binom{n-1}{m-1}$.

设 $\mathscr{L}$ 是符合规定条件的锁的集合，并设 $\mathscr{C}$ 代表 n 位科学家之集 S 中所有 $(m-1)$ 位科学家的子集组成的集合. 我们先证明 $L\geqslant\binom{n}{m-1}$. 假如可以建立从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{L}$ 上的一一的函数 f，这就表明 $|\mathscr{L}|\geqslant|\mathscr{C}|=\binom{n}{m-1}$[①]. 这个函数 f 可用如下方式获得. 设 $A\in\mathscr{C}$，由于 $|A|<m$，则必定存在一把锁不能被集 A 中的任何人打开. 我们把这把锁取成 $f(A)$. 这就定义了从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{L}$ 上的函数 f. 现在证明 f 是一一的. 设 $A,B\in\mathscr{C}$,

① $|\cdot|$表示集合中元素的个数.

且 $A\neq B$，我们来证 $f(A)\neq f(B)$. 因为 $A\neq B$，$A\cup B$ 就真的包含 A，所以 $|A\cup B|\geqslant m$. 于是保险柜被集 $A\cup B$ 中的人打开. 因为 A 中没有人能打开锁 $f(A)$，于是有一位 $s\in B$，使得 s 能打开锁 $f(A)$，但 s 不能打开锁 $f(B)$，所以 $f(A)\neq f(B)$，即这两把锁不同. 这就完成了 $L\geqslant\binom{n}{m-1}$ 的证明.

下面证明 $K\geqslant\binom{n-1}{m-1}$. 当然，这里需要假定没有一把是"万能"钥匙. 更明确地说，就是每一把钥匙只能打开一把锁. 对于每一位科学家 $s\in S$，设 $\mathscr{K}(s)$ 是成员 s 持有的所有钥匙的集合，而 $\mathscr{C}(s)$ 是集 S 中不含成员 s 的所有 $m-1$ 个人的子集的集合. 像前面那样，只要证明从 $\mathscr{C}(s)$ 到 $\mathscr{K}(s)$ 上存在一一的函数 g 就足够了，于是就获得 $|\mathscr{K}(s)|\geqslant|\mathscr{C}(s)|=\binom{n-1}{m-1}$. 如果 $A\in\mathscr{C}(s)$，那么 $|A\cup\{s\}|=m$，所以保险柜能被 $A\cup\{s\}$ 打开. 这就推知 s 一定持有一把能打开锁 $f(A)$ 的钥匙. 设 $g(A)$ 是这把钥匙. 这就定义了从 $\mathscr{C}(s)$ 到 $\mathscr{K}(s)$ 的函数 g，且容易看出函数 g 是一一的（如果 $g(A)=g(B)$，即这把钥匙能同时打开锁 $f(A)$ 和 $f(B)$，于是推出 $f(A)=f(B)$，所以 $A=B$.）.

到此为止，我们已经证明了 $L\geqslant\binom{n}{m-1}$ 和 $K\geqslant\binom{n-1}{m-1}$. 为了看清等式成立，只需要给出让 $|\mathscr{C}|=\binom{n}{m-1}$ 和 $|\mathscr{K}(s)|=\binom{n-1}{m-1}$ 的锁与钥匙的明确选配的方法即可. 这是很容易做到的. 对于每一个 $A\in\mathscr{C}$，分配给保险柜上一把锁 $L(A)$，并让 S 中 A 的补集的每位成员带有一把能够打开锁 $L(A)$ 的钥匙. 设 $\mathscr{L}$ 就是由这样的锁组成的集合，即对每个 $A\in\mathscr{C}$，对应

着一把锁. 注意到,锁 $L(A)$不能被科学家集 B 打开的充分必要条件是 $B\subseteq A$. 由于这个条件要求 $|B|<m$. 我们看出要想使集 B 能打开 $\mathscr{L}$ 中所有的锁,就必须要有 $|B|\geqslant m$. 还可以看到 $\mathscr{L}$ 同集 $\mathscr{C}$ 是一一对应的. 于是我们就给出了让 $|\mathscr{L}|=\binom{n}{m-1}$ 的锁之集的一种安排方式,同时应注意到,对于 $A\in\mathscr{C}(s)$的每位科学家来说,都会得到打开锁 A 的钥匙. 所以对每位 $s\in S$,都有 $|\mathscr{K}(s)|=\binom{n-1}{m-1}$. 这就完成了让最小值 K 与 L 实现的证明.

现在给出一种满足问题所要求的条件的安装锁与分派钥匙的方法的实例. 该例总共只要 n 把锁,以及每位科学家手中只要持有一把钥匙即可. 当 $m<n$ 时,这一结果显然与上一段所证明的结果不同,而产生这种不同的准确理由,在看完例子的讲解之后,就会自然明白了.

为了清楚起见,我们要把该例描绘成一个具体的物理方法. 现在把保险柜的门看成一个用大插销关闭着的门. 如果你能让插销向左边滑动至少 m 英寸后,柜门就可以自由地打开,否则柜门就不能打开. 这时安装锁的方式不再是直接把锁挂在保险柜门的钌铞上,而是把锁安放在插销的滑轨上,用这些锁挡住插销,使插销不能向左滑动. 注意,当把一锁打开后,该锁就能从滑轨上取下来;还要注意,当一把锁在滑轨上锁上后,它不能从滑轨上取下来,但却能在滑轨上任意左右滑动. 现在让每把锁的宽度恰为 1 英寸,于是我们知道,当打开 k 把锁,并把它们从滑轨上取下来后,插销就可以向左滑动 k 英寸. 一旦至少有 m 把锁打开,并从滑轨上取下来,插销就至少能向左滑动 m 英寸,于是保险柜的门就能打开. 这样一来,滑

轨上只要安放 n 把锁，而每位科学家只要有能打开一把锁的钥匙(当然每把钥匙只能开一把锁)，问题就解决了. 这种安放锁的方法说明，$L=n$，$K=1$.

这两个数字比上面定理所说的 $L=\binom{n}{m-1}$ 和 $K=\binom{n-1}{m-1}$ 要少得多. 我们自然会问产生这两种答案的根本原因是什么？或者，前面的证明有什么不对头的地方？

这个答案就是，在前面的证明中，正如上述例子所揭示出的那样，我们用到了原始问题所没有的一个隐蔽性假定. 这个隐蔽性假定就是：*要想打开保险柜就必须打开每一把锁. 这个假定正是用来证明函数 f 和 g 是一一对应的关键所在.* 如果在原始问题上增加了这个隐蔽性条件(当然，在整个问题的讨论中总是假定一把钥匙开一把锁)，那么早先的值 $L=\binom{n}{m-1}$ 和 $K=\binom{n-1}{m-1}$ 就是正确的，而去掉这个隐蔽性条件后，新的值 $L=n$ 和 $K=1$ 就是正确的.

一旦揭示出“不实用”定理与“实用”例子之间的不同的理由后，一切都变得自然而简单了. 虽然如此，在课堂上讲解这个例子会向学生们更加深刻地阐明：在原始问题或数学模型上附加隐蔽性条件会使问题发生根本性的不同. 从另一个角度看，就是承认数学的想法与“真实”情况的实际要求之间存在着潜在的不同. 这种揭示的另一个价值在于，使人们认识到力图消除在理论与实用之间的此种不同常常会导致更加深入的数学研究和开辟更广泛的应用范围.

譬如，让我们来考虑滑动插销解法的另一种执行方式. 我们不再使用带有锁的滑动插销，而是希望给保险柜安装一个“智能”门，即是用一台简单计算机控制的门. n 位科学家的每

位只须持有一把能够旋转一个开关的钥匙. n 个开关的位置由计算机监视. 一旦至少有 m 个开关旋转到正确的位置时，计算机的控制程序就让保险柜打开门(作为一种挑战，读者可以自行研究计算机的实施方案，或是为此目的设计出适用的电网络.). 这种实施方案还可以促使人们把原有问题做进一步的延伸，并引导出新的应用. 例如，为了省去科学家为摸出钥匙所花费的时间，让我们设想采用"投票"表决的方法来决定是否打开保险柜. 我们约定：科学家在场，就意味着他投赞成票，不在场就意味他投反对票，如果至少有 m 个人投赞成票，保险柜就能打开，否则保险柜就不能打开. 从这个观点出发，锁和钥匙都成了记录投票状况的机器. 于是原来的锁和钥匙的问题就转化为更加抽象的**投票表决问题**.

假定总共有 n 个人，让他们从 k 种事物 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 之中通过投票表决方式做出选择. 当 $k=2$ 时，我们可以把这时的投票表决描绘成用小球数来做投票结果的记录方式. 如果你赞成 A_1，你就放入一个小球，如果你赞成 A_2，你就不放入小球. 当收到至少 m 个小球时，判 A_1 赢，否则就判 A_2 赢. 注意，对于 $A_i, i=1,2$ 来说，其获胜的准则一般是不同的. 在许多情况下，人们要研究具有同等获胜准则的情况，也就是把同一准则同等地运用到所有的 $A_i, 1 \leqslant i \leqslant k$ 上. 当 $k=2$ 时，这个同等的条件就是我们例子中 $m=[n/2]$①的情况. 这时获胜的一方也就是收到多数选票的一方，注意这时弃权者被认为是投了另一方的票. 在有着弃权者打折扣的情况下，我们可以宣布获胜的一方就是收到多数票的一方. 这种方法显然是对 A_1 和 A_2 同等的准则，且可以用于 $k \geqslant 2$ 的情况，即就是谁得票最

① $[x]$表示不超过实数 x 的最大整数.

多谁赢. 然而在 $k>2$ 的情况，这种方法也有其不足之处. 虽然获胜的一方可以被认为是综合地反映了投票者的心愿，但是投票者之中的相当大的多数人可能会是强烈地反对胜方. 但是，这种不足之处并不单是限于这种特定的投票选择方式，而是在多方的社会选择理论中所产生的根深蒂固的问题.

这个问题就是，对于已经排好顺序的各方 $A_1, A_2, \cdots, A_k$，请您给出一种令人满意的投票选择方法. 对此我们有一个著名的 Kenneth Arrow（诺贝尔经济奖获得者）定理：当 $k>2$ 时，如果有一个明确的完全合理的条件存在，那么就不存在令人满意的选择方法.

关于社会选择（即熟知的选择理论）的论题的极好的介绍，请读者参看[2]的第十章和[3]的第七章. [3]中的关于 Arrow 不存在定理（7.2.2）的讨论是目前为止最好的，它提供了许多很好的实例表明：当理论的结论与实际要求相反或不一致时就能引发出进一步的数学研究工作.

（杨燕昌编译，潘承彪校）

参 考 文 献

[1] C. L. Liu, Introduction to Combinatorial Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1968.

[2] J. Malkevitch and W. Meyer, Graphs, Models and Finite Mathematics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1974.

[3] F. S. Roberts, Discrete Mathematical Models with Applications to Social, Biological and Environmental Problems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976.

[4] A. M. Yaglom and I. M. Yaglom, Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions, Vol. 1, Holden-Day, San Francisco, 1964.

登 山 绳①

——登山者读了会大吃一惊

Joel Zeitlin

自我开始登山起，就一直对绳索的强度问题感兴趣. 绳子应当足够牢固，不仅能承受爬山者本身的重量，而且当登山者万一失足时还能保持不断. 在本篇短文中，我们建立绳索的静止强度和断裂强度以及给定重量从给定高度落下时作用在绳子上的力的公式，然后用这些公式确定某些标准绳索的强度，以及两根不同粗细的绳子依次相结时的强度.

绳索的静止强度是它所能承受的恰使绳子不致断裂的重量. 对于截面积均匀的绳子，其静止强度 B 由一常数乘以截面积给出，于是直径为 d 的绳索的静止强度为 $B(d)=cd^2$，其中 c 是某个常数. 它事实上就是拉断绳子所需的力.

如果在绳上系一重物并使之从一给定高度处下落，当绳子伸展到它的自然长度后，由于重物下落时产生力的作用，绳子将开始伸长，即有位移，这时绳子会产生较大的反向拉力. 我们可假定绳子服从拉力等于常数乘以位移的虎克定律（它通常适用于弹簧），由此来分析这种情形（工厂关于绳子伸长量作为负载的函数的曲线表明两者关系并非完全线性的，不过基于虎克定律的计算能给出很好的近似.）. 因而我们假定

---

① 编译自"Rope Strength under Dynamic Loads: The Mountain Climber's Surprise", *Mathematics Magazine*, **51**(1978), 109～111.

拉力 $F=kx$，其中 x 是绳子的位移(或伸长量)，$k=EA/L$ 是虎克常数，它依赖于绳的截面积 $A=\pi d^2/4$、长度 L 以及材料常数 E. 根据虎克定律，当位移最大时力也最大.

把位移 x 写为时间 t 的函数 $x(t)$；$t=0$ 是开始伸长的时刻，t_1 是位移达到最大的时刻. 于是 $x(0)=0$，而 $x(t_1)$ 等于最大位移 $x_{\max}$. 还有，$\dot{x}(0)$ 是绳子开始伸长时的初速度 v_0，而当绳子伸长量达到最大即将开始缩回时，$\dot{x}(t_1)=0$. 我们感兴趣的是 $F_{\max}$，即 t_1 时产生的最大拉力，以确定何时 $F_{\max}=B(d)$.

作用在系于绳子末端物体上的力有向下的力 $w=mg$ 和向上的力 kx. 这些力的代数和等于 $m\ddot{x}$. 取向下方向为 x 的正向，有 $m\ddot{x}=-kx+w$. 两边乘以 $\dot{x}$ 并从 $t=0$ 到 $t=t_1$ 积分之，得到[①]

$$-\frac{1}{2}mv_0^2=-\frac{1}{2}kx_{\max}^2+wx_{\max},$$

其中 $x_{\max}=x(t_1)$，由此解得

$$x_{\max}=\frac{w\pm\sqrt{w^2+kmv_0^2}}{k}.$$

由问题的物理特性可知应取正号.

现在考虑一个物体从静止开始下落直到绳索绷直，伸长刚刚开始，设其间时间为 t，距离为 s；那时的速度应为 v_0，所以有 $s=gt^2/2$，$v_0=gt$，从而 $v_0^2=2sg$. 由于 $k=EA/L$(A 为绳子截面积，L 为其自然长度)，我们得到

---

① 没有学过微积分的读者可用以下方法求 $x_{\max}$. 如果记得弹性势能为 $kx^2/2$，则由于 $t=0$ 时绳端具有动能 $mv_0^2/2$，$t=t_1$ 时具有位能 $-mgx_{\max}=-wx_{\max}$，弹性势能 $kx_{\max}^2/2$，由能量守恒定律即得 $mv_0^2/2=kx_{\max}^2/2-wx_{\max}$.

——译者注

$$x_{\max}=\frac{w+\sqrt{w^2+2EA(s/L)mg}}{k}$$

$$=\frac{w+\sqrt{w^2+2EAfw}}{k},$$

其中 $f=s/L$ 称为下降因子，$w=mg$ 是所悬物体的重量，最大的力由

$$F_{\max}=kx_{\max}=w+\sqrt{w^2+2EAfw} \tag{1}$$

给出. 这样，对于给定的重量，它所产生的最大力依赖于下降因子，即下降距离对绳长之比. 因而 20 米长的绳子下落 10 米所产生的力与 20 厘米长的绳子下落 10 厘米所产生的力相同（为使这一点看起来合乎情理，可以设想较长的绳子具有较大的缓冲作用.）.

我们需要求出绳子所能承受的临界（或最大）重量 w_m，即使得 $F_{\max}=B$ 的 w_m：

$$w_m+\sqrt{w_m^2+2EAfw_m}=B.$$

由此解出

$$w_m=\frac{B^2}{2EAf+2B}. \tag{2}$$

现在，我们必须要知道静止强度 B 中的比例常数 c 和虎克定律中的材料常数 E. 德国 Edelrid Works 出版的《登山绳索手册》标明 11 毫米的尼龙绳的静止或断裂强度大约是 21750 N（g 取 $10\mathrm{m/s^2}$）. 由此，$B(11)=c(11)^2=2175$，$c=2175/121=17.975\approx180\ \mathrm{N/mm^2}$，于是 $B=18d^2$. 同一手册还载明，800 N 的重量落下且下降因子为 1.78 所产生的冲击力为 9700 N. 把这些数据代入(1)，解得 $EA=2780$，从而 $E=2780/\pi(5.5)^2=292.5\ \mathrm{N/mm^2}$.

下降因子 f 通常在 0 与 2 之间变化. $f=2$ 是最坏的情

形，这时登山者爬到紧系绳子的安全点上方整个的绳长距离，然后掉下来越过安全点后再落下的整个绳长距离. 令 $f=2$ 并代入方程(2)，得临界重量为

$$w_m = \frac{(18d^2)^2}{2(29.25)\pi(d/2)^2(2) + (2)18d^2} = 2.53d^2, \quad (3)$$

其中重量 w_m 以牛顿计，直径 d 以毫米计. 对于 $d=11$，我们得到 $w_m=3061.3$ N，因此用这样粗细的绳子登山者应当是非常安全的.

令人好奇和恐惧的是，登山者实际爬山时，常常用一根细绳结上 11 毫米的粗绳，再把细绳绑牢在一个安全点上(例如细心地挤绑进花岗岩窄缝中). 这时有两根粗细不同的绳子连结起来，所以也得考虑细绳. 登山用的最细的绳子是 5 毫米的. 对于 $d=5$，由(3)得到 $w_m=632.5$ N，许多人的体重都超过它!

不过 5 毫米绳子并不是单独用的. 我们需要分析两根不同粗细的绳子连结在一起时绳子的强度，这样才完整. 实际做时，细绳绑牢在安全点上，粗绳结紧在细绳上. 假定所有连结都是理想的(即假定打结不影响结构)，仍假定虎克定律适用，则得 $F=k_c x$，其中 k_c 是关于相连绳子长度的常数；x 是总的伸长，因而 $x=x_1+x_2$，x_i 是第 i 根绳子的总伸长. 设 k_i 是相应的虎克常数，并假定在任一瞬间整个绳子上的力是一常数，从而 $F=k_1x_1$，$F=k_2x_2$. 把这些结果合起来，即有

$$k_c = \frac{F}{x_1+x_2} = \frac{F}{F/k_1+F/k_2} = \frac{1}{1/k_1+1/k_2}. \quad (4)$$

现在来考虑一个具体情形，假定长 1 米、直径为 5 毫米的绳子和长 3 米、直径为 11 毫米的绳子相连. 由 $k=EA/L$ 得 $k_1=574$，$k_2=927$，从而 $k_c=354$. 以 kL 代替(2)中的 EA，得公式

$w_m = B^2/(2ks+2B)$. 有 $B=B(5)=(18)(5^2)=450$, $s=8$, $k=354$, 于是 $w=308.5$ N,这可令人惊讶：5 毫米绳与 11 毫米绳连起来的强度还不如 5 毫米绳本身！也可以说**链条比它最弱的一环还要脆弱**.

上述结论是从"串联阻抗律"(4)导出的,不依赖于物理度量. 关于这个结论,一种可能的解释是：当绳子伸张时,粗的部分对伸展的阻抗大于细的部分,于是绳子细的部分会出现更大的阻抗,从而下降因子增大. 另一个模型的构造可根据所有伸长必在绳子最细部(即最易伸长部)出现这个假定. 采用这个模型,在上述例子中下降因子为 8,因而会得到大约为 200 N或更小的临界重量.

(沈永欢编译,潘承彪校)

参 考 文 献

A Guide to Mountaineering Ropes. Edelrid Works, Isny (Allgäu), West Germany.

跟着太阳走[1]

Paul Penning

1. 引言

本文讨论的问题来自一批热衷于远足的人. 某人突发奇想,提出下次旅行是否可以不事先规划路线,而是采用如下的简单指令: 在每个交叉路口,看哪条路最靠近太阳就走哪条路. 当然,这种走法与启程的时间及周围的地形有关. 一般说来(当然,这与季节及人在地球上的位置有关),行进的方向大体上是:上午朝东,中午朝南,下午朝西. 但是,马上有人提出了一个至关重要的疑虑: 按着这种走法,我们还能不能回家? 或者,说得不那么严重些,我们还有没有可能再次踏上原先走过的路?

这个问题引起了我的兴趣. 这里,我试图在简化一些条件下探讨这种走法的路程轨迹. 首先假定在地形方面没有任何障碍,就像一条在深海中的船那样,朝任何方向都能行驶;其次假定: 不仅白天(即太阳在地平线上方时)可以走,夜里也能走,因为尽管看不到太阳,但它的具体位置我们是知道的. 在上述两个假定下,称徒步者行进的轨迹为"太阳指路图",下面我们分析这一图形的形状.

---

① 编译自"P. Penning, Walks Guided by the Sun", *Math Magazine*, **63** (1990), 108~113.

2. 太阳的位置

徒步者可以把太阳看成是在一个单位球面上，而徒步者自己位于球心. 事实上，由于太阳与地球之间的距离很大，因此地球也可视为一个点，即球心.

为了便于建立该问题的数学模型，根据运动的相对性，我们假定地球只作自转，因而太阳围绕地球作顺时针旋转，为此引进一个笛卡尔左手直角坐标系. 设原点是旅行的起点. 因为是在地球的表面旅行，所以可以看作是在初始位置 O 点处的地球球面的切平面上运动，取此平面为 OXY 平面，其中的 X 轴指向正南，而 Y 轴指向正西. 地球中心与初始位置 O 的连线取为 Z 轴，它指向天顶. 这样，坐标系 O-XYZ 就构成了一个笛卡尔左手直角坐标系(为简便起见，后文中也称 X 轴、Y 轴和 Z 轴分别为南轴、西轴和天顶轴.).

根据天文学的基本知识，在我们的问题中有三个十分重要的角.

第一个角 α 由旅行所在的季节决定，我们称之为**季节角**(season-angle). 因为地轴在宇宙空间中的方向不因季节而变化，因此，在地球绕太阳公转的过程中，太阳有时直射在北半球，有时直射在南半球，有时直射在赤道上. 因为我们是在北半球上，因此在夏至(6 月 21 日前后)时，$\alpha=23.5°$，即太阳直射在北纬 23.5°；在春分(3 月 21 日前后)和秋分(9 月 21 日前后)时，$\alpha=0°$，即太阳直射在赤道上；在冬至(12 月 21 日前后)时，$\alpha=-23.5°$，即太阳直射在南纬 23.5°. α 角的变化范围是从 $-23.5°$ 到 $23.5°$(准确的数字是 $23°26'21''$). 地轴同公转轨道所在平面斜交的角度是 $90°-23.5°=66.5°$，因此北极星与太阳之间的夹角是 $90°-\alpha$. 我们将不考虑在旅行过程中 α 角

的细小变化(因为旅行的日子不是很多),因此可以假定太阳沿着单位球面上的一个圆移动,其角速度是常数,$\Omega=15^\circ/\mathrm{h}=\pi/12\mathrm{rad}/\mathrm{h}$,即地球自转的角速度.

第二个用以确定太阳位置的重要的角是**小时角** φ(hour-angle):正午时 $\varphi=0$,φ 随时间增加而线性地增加:

$$\varphi=\Omega(t-12). \tag{1}$$

第三个角是旅行所在的**纬度** θ(latitude).我们将北半球的纬度 θ 取正值.不妨可以假定,在整个徒步过程中,θ 保持不变.

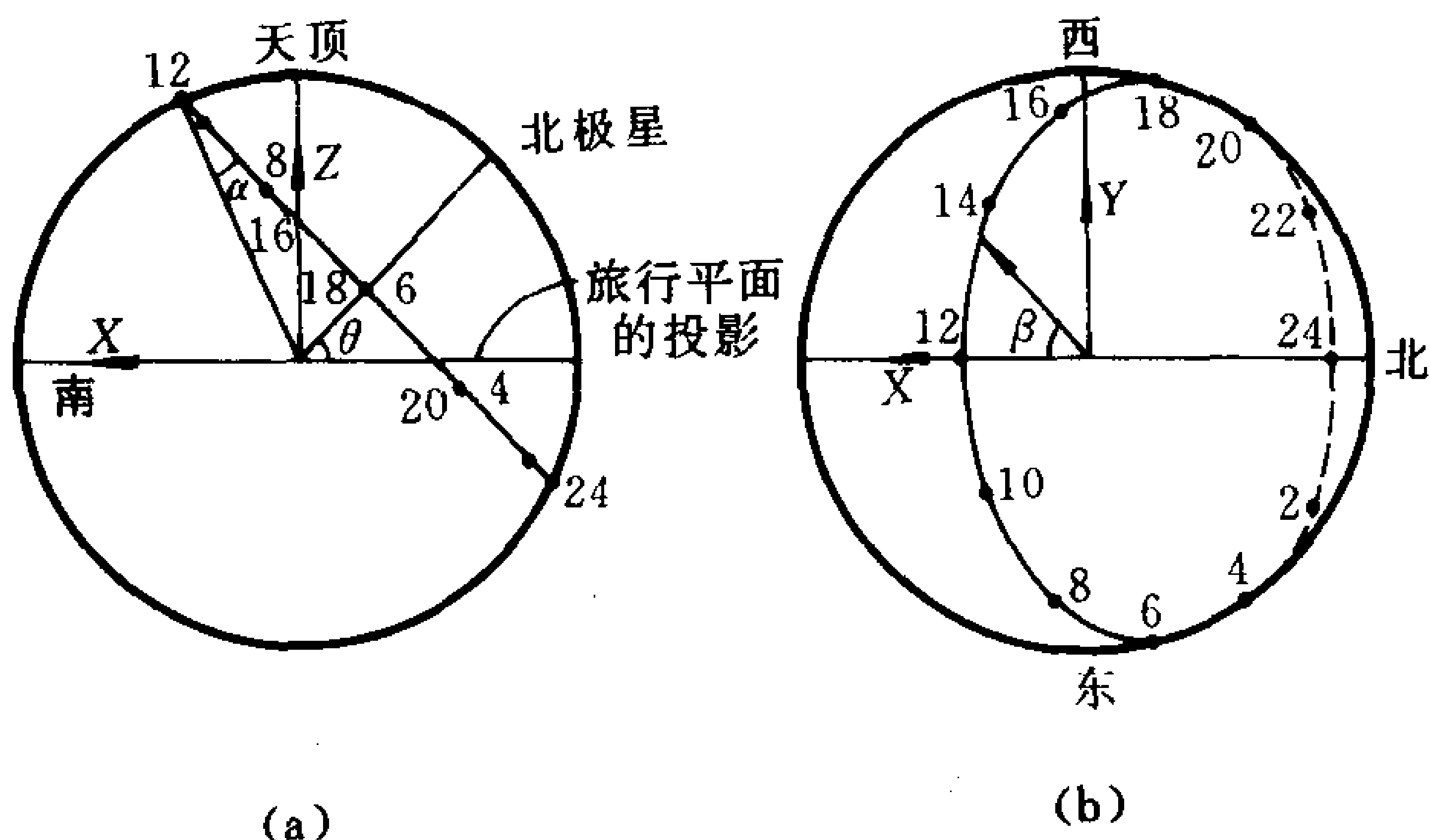


图 1 太阳被表示成单位球面上的一个点,徒步者位于球心处.太阳每天运行的轨迹是一个圆.图中的数字表示太阳在该位置时的每天的整钟点数.这时,徒步者位于北纬 45°处,季节角是 α.其中的(a)是在通过天顶轴和南轴的平面 $Y=0$ 上的投影图;(b)是在徒步旅行所在平面上的投影图.

图 1 解释了北纬 45°处以上引进的几乎所有的相关知识.其中的(a)是在平面 $Y=0$ 上的投影,圆是单位球面在其上的截线.在该投影中,太阳的运行轨迹成为一条直线,它离开原

点的距离与角 α 有关，它与旅行平面的夹角是 $\pi/2-\theta$. 其中的(b)是在旅行平面 OXY 上的投影. 此时太阳的移动轨迹是一个椭圆，在日出和日落之处与单位圆相切.

设太阳所在位置的坐标是(X,Y,Z)，利用立体解析几何的知识可以算得

$$\begin{aligned} X &= \sin\theta\cos\alpha\cos\varphi - \cos\theta\sin\alpha, \\ Y &= \cos\alpha\sin\varphi, \\ Z &= \cos\theta\cos\alpha\cos\varphi + \sin\theta\sin\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

图 1(b)中的角 β，即徒步者行进时所必须遵循的方向角. 从南轴的正方向起，顺时针方向转动是正角.

$$\cos\beta = X/\sqrt{1-Z^2},\ \sin\beta = Y/\sqrt{1-Z^2}. \tag{3}$$

可以发现，当$|Z|=1$，$X=Y=0$，即太阳恰好在天顶（或天底）时上述值无法计算. 但这对问题的讨论并没有产生多大的困难，因为太阳逗留在天顶（或天底）只是一瞬间. 还应注意到仅当从东到西时太阳才经过天顶，仅当从西到东时太阳才经过天底.

3. “太阳指路图”的数学表述[①]

在我们所讨论的问题中，与时间有关的只有太阳移动的角速度 Ω 及徒步者的速度 v. 利用小时角 φ，我们将不考虑时间本身. 因此文中所有的距离都以规范长度 $S=v/\Omega$ 作为单位长. 在此单位下，设徒步者的坐标为(x,y). 由上一节的定义，可以求得：在任意小时角出发的“太阳指路图”的（规范）坐标是

---

① 不熟悉微积分的读者可略去推导过程，只看结论.

$$x=\int\cos\beta\mathrm{d}\varphi,\quad y=\int\sin\beta\mathrm{d}\varphi,\qquad(4)$$

其中的积分下限和上限分别是角 φ 在旅行起点和终点时的值.

有一个点,即在北极处,"太阳指路图"可以比较简单地确定出来. 在该点处,太阳距离地平线的高度与小时角 φ 无关: $Z=\sin\alpha$(见(2)). 由于太阳移动的角速度是常数,因此角 β 随时间线性递增(注意:$\beta=\varphi$!). 从而可以推得:"太阳指路图"必是一个圆. 其半径可以从 24 小时走过的路程求得:$24\cdot v/2\pi=v/\Omega=S$. 因此,在规范长度下,在北(或南)极点处"太阳指路图"的方程是

$$\theta=\pm 90^\circ:\ x^2+(y-1)^2=1,\text{与 }\alpha\text{ 无关}.$$

太阳在空中的运行关于通过天顶轴和南轴的平面(即 $Y=0$)是镜面对称的,因此对于 φ 和 $-\varphi$,太阳的两个位置是对称点. 此时 X、Y、Z 和 β 的大小都没有变,但 Y 和 β 的符号相反. 因为 $\cos\beta$ 是关于 φ 的偶函数,所以有如下的等式.

$$x(\varphi)-x(0)=x(0)-x(-\varphi).$$

而 $\sin\beta$ 是关于 φ 的奇函数,因此有

$$y(\varphi)-y(0)=y(-\varphi)-y(0).$$

显然,直线 $x(0)$ 是"太阳指路图"中的一条镜面直线. 同样的讨论也适用于小时角为 $\pi+\varphi$ 和 $\pi-\varphi$ 的情形,此时 y 和 β 也只改变符号,因此直线 $x(\pi)$ 也是"太阳指路图"中的一条镜面直线.

从而,在研究"太阳指路图"时,只需讨论 $\alpha,\theta>0$ 的情形. 下面的表 1 概括了由符号的改变而发生的方向的变化.

表 1

季节角	纬度	小时角	行进方向角	时间	东西轴坐标	方　向
α	θ	φ	β	t	y	
α	$-\theta$	$\pi+\varphi$	$-\beta$	$t\pm 12$	y	镜面像 镜面直线：南北轴
$-\alpha$	θ	$\pi+\varphi$	$\pi+\beta$	$t\pm 12$	$y\pm 1/2$	相反
$-\alpha$	$-\theta$	φ	$\pi-\beta$	t	$y\pm 1/2$	镜面像 镜面直线：东西轴

如果用太阳的高度 Z 对小时角 φ 作变量替换，则(4)中 x 和 y 的积分可以化为熟知的形式. 但是，对于给定的 Z 值，相应的 φ 角不唯一：

$$Z(-\varphi)=Z(\varphi)=Z(2\pi-\varphi).$$

因此必须限制 φ 的取值在区间$[0,\pi]$中，区间的端点是：

$$\varphi=0:\ Z=\cos(\theta-\alpha);\quad \varphi=\pi:\ Z=-\cos(\theta+\alpha).$$

要看到，在此区间中 $y\geqslant 0$(见(2)). 对于其他小时角的“太阳指路图”可以(分别)利用关于直线 $x(0)$ 和 $x(\pi)$ 的镜面对称性求得. 因为

$$dZ=-Y\cos\theta d\varphi,$$

$$X=(Z\sin\theta-\sin\alpha)/\cos\theta,$$

$$Y\cos\theta=\sqrt{[\cos(\theta-\alpha)-Z][\cos(\theta+\alpha)+Z]},$$

所以 x 和 y 的方程是

$$x(\varphi)-x(0)=-\operatorname{tg}\theta\int(Z-\sin\alpha/\sin\theta)dZ/(Y\cos\theta\sqrt{1-Z^2}),$$

$$y(\varphi)-y(0)=-\int dZ/(\cos\theta\sqrt{1-Z^2}),$$

其中的积分下限是 $\cos(\theta-\alpha)$，而积分上限是对应于待定的 φ 的 Z 值. 可以发现，在 x 的表达式中包含有一个非标准形式的椭圆积分. 如果 $\alpha=0$ 或 $|\theta|=|\alpha|$，则 x 可以直接积出来，但

所得结果对解决问题并没有太大的贡献，因为其中必须估计数值计算的精确度，而这在所有其他的情形也都要做.

将 y 的表达式中的积分积出得

$$y(\varphi)-y(0)=(\arccos Z-\theta+\alpha)/\cos\theta.$$

注意，$\arccos Z$ 是太阳和天顶之间的夹角. 对于任意 Z 值，$\arccos Z$在 0 到 π 之间，经过 24 小时，$\arccos Z$ 又达到相同的值，因此 y 值也相同. 也就是说，“太阳指路图”在东西轴方向上的分量是周期性的，周期是 24 小时.

4. 结论与分析

为确定“太阳指路图”在不同纬度和不同季节的形状，需要作数值计算. 下面介绍几个具体的“太阳指路图”，见图 2～图 5. 在这些例子中，季节角 α 都是 20°，即在 6 月 21 日前后. 图形中的方向按通常的习惯：上北下南，左西右东. 图中的点是徒步者在整钟点时到达的位置，而旁边的数字即为此时的钟点.

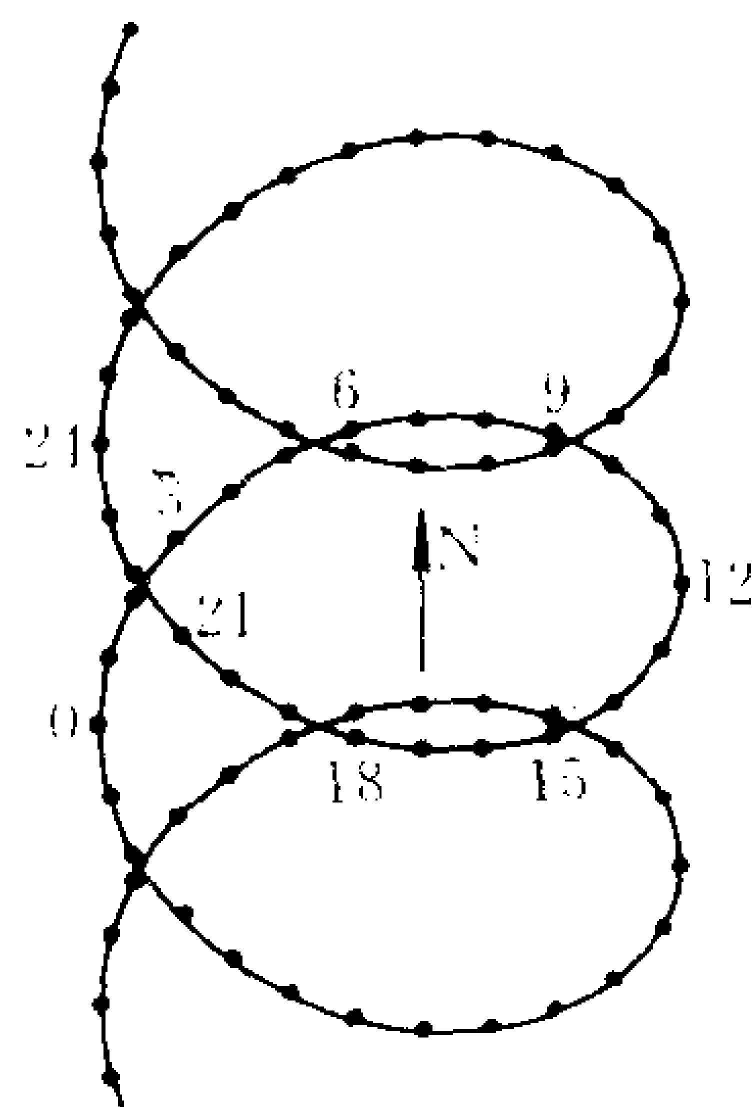


图 2　北纬 45°处季节角为 20°时的“太阳指路图”

图 2 中的“太阳指路图”是在北纬 45°处(图中数字表示一天中的整钟点数)，太阳的运行轨迹见图 1. 正午时太阳在南面，因此徒步者朝南走，即在图形中朝下方走. 但在下午的旅程中方向转为朝西. 从图 1 我们可以清楚地看到，在 16 时后，太阳位于西面. “太阳指路图”与此是一致的. 在过了 16 时之后的一段时间里，曲线的切线方向指向西. 子夜时分，徒步者朝北走. 从图中可以看到，行进方向从朝南变到朝西用了 4 个小时差一点儿的时间，而从朝西变

到朝北几乎要 8 个小时！因此，夜间路线的弯曲程度不如白天. 在早晨 8 时前不久，太阳从东方升起，因此徒步者往东走. 到了中午，如同前一天的中午一样，到达图形中曲线的最右点，但在南北方向上有一个往北的平移. 曲线的这种形状是由纬度和季节角决定的，此时$|\theta|>|\alpha|$.

在季节不变的情况下，纬度越大即越往北，则每天的平移越小. 到北极点时，平移变为零. 这时，"太阳指路图"成为一条封闭曲线，即一个圆. 前文已叙述了这种情形.

纬度越往南(同样地，季节不变)，则每天的平移就越大. 图 3 是北纬 25°处的"太阳指路图". 可以看到，图形上在接近太阳升起和落下的时间处有一个重合点(此时 $Z=0$，$\cos\varphi=-\mathrm{tg}\theta\mathrm{tg}\alpha$). 因此，在这一纬度和这一季节，白天的"太阳指路图"实际上是一条封闭曲线. 也就是说，徒步者日出时离家，日落时回到家里.

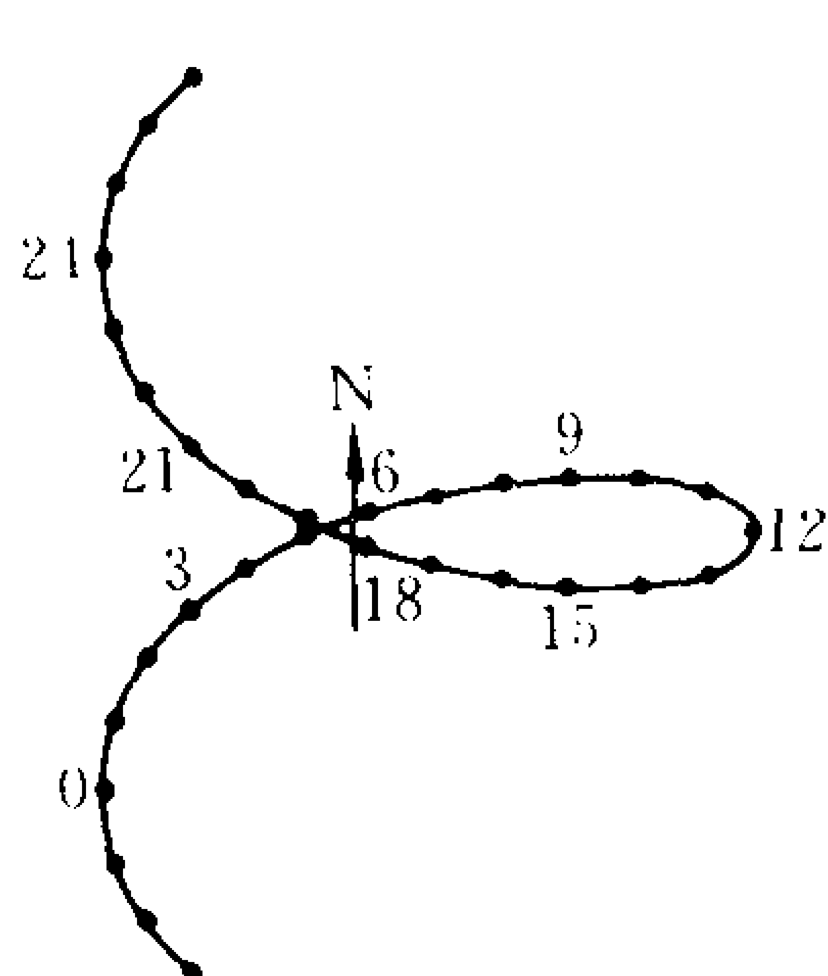


图 3　北纬 25°处且季节角为 20°时的"太阳指路图"

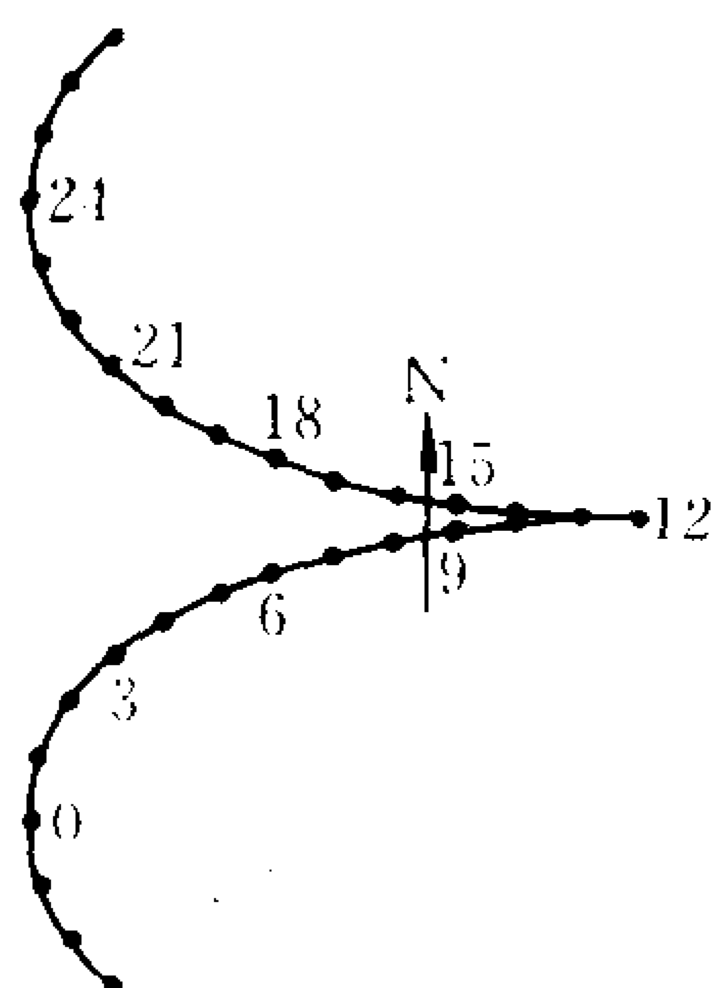


图 4　北纬 20°处且季节角为 20°时的"太阳指路图"

纬度再往南，到达 $\theta=\alpha$ 时，太阳通过天顶(注意，这一过程总是发生在太阳从东到西时). 因此，在正午前一点儿时间，

徒步者还在往东走，但马上，一过 12 时，他就必须朝西走了．两个截然相反的方向！因此很显然，“太阳指路图”上有一个尖点，如图 4 所示，图中数字是一天中的整钟点数．

纬度再往南，则太阳将永远在空中的北半部分，因此在整个 24 小时中在每一点的行进方向上都有一个朝北的分量．“太阳指路图”上不可能有重合点．图 5 给出的是在北纬 15°处（季节角仍是 20°）的“太阳指路图”．相应于赤道的“太阳指路图”在 6 时和 18 时的位置有一个折合的对称性．

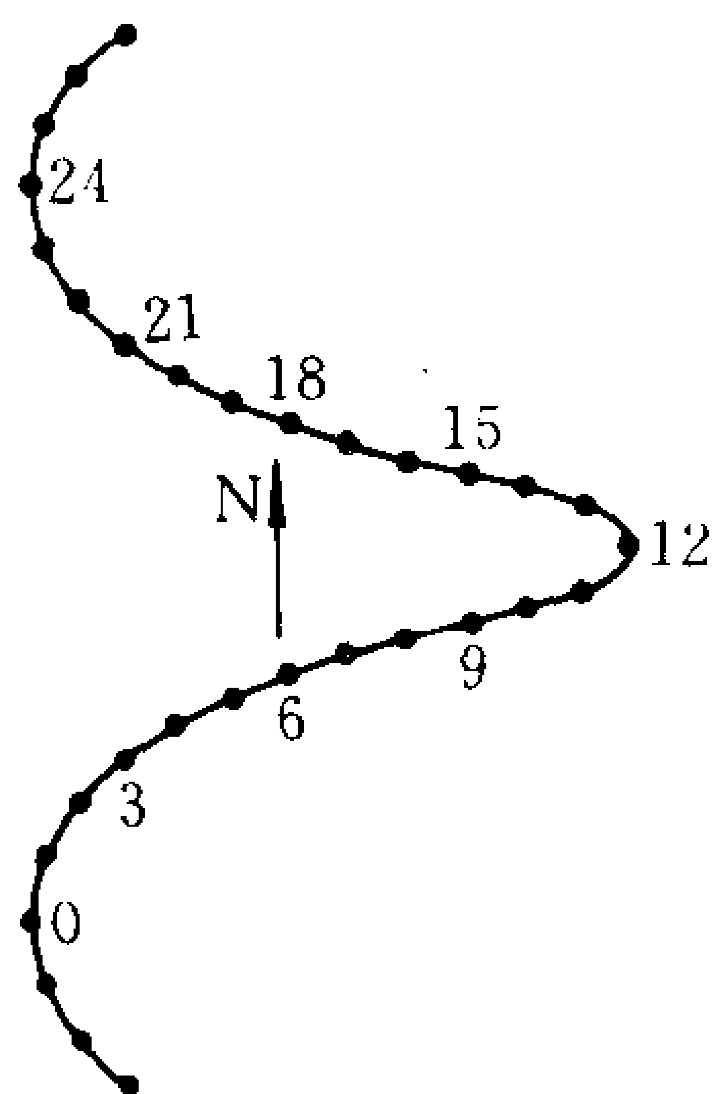


图 5　在北纬 15°、季节角为 20°时的“太阳指路图”，数字是一天中的整钟点数．

图 6 给出的是对于不同的季节角作为纬度的函数的每天在南北方向上的平移．在春分或秋分时（$\alpha=0$），每天的平移是零，且与纬度无关．因此“太阳指路图”是封闭曲线，也就是说，在地球的任何地方，徒步者在 24 小时后就回到原先的出发地．图 6 中的曲线显示：随着季节角的增大，在南北方向上每天的平移也增大．在赤道处，它达到最大值，但在北极（或南极）处为零．图中曲线上的点表示太阳通过天顶的位置，相应地，“太阳指路图”在该处有个尖点，或者，图形在此处看上去似乎有一个拐点．对于季节角大于 23.5°的情形（当然，这在地球上是不可能的！）看不出有什么本质性的变化．对于负的 α 值或 θ 值，“太阳指路图”可以利用表 1 中给出的对称性确定出来．

“太阳指路图”在东西方向上的跨度等于正午时和子夜时两个位置的 y 坐标的差．在春分或秋分时（$\alpha=0$），这一跨度在

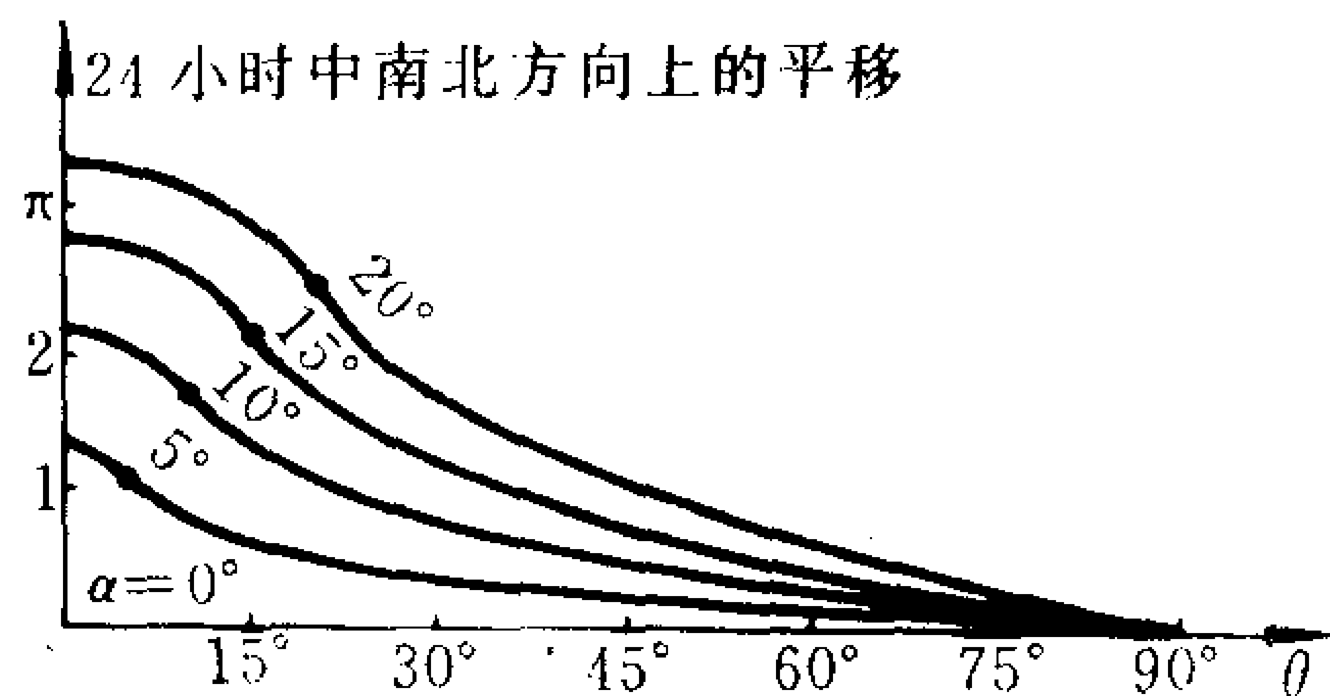


图 6　对于不同的季节角作为纬度的函数的每天在南北方向上的平移

赤道处为 π(此时的“太阳指路图”是一条东西向的直线),随着纬度增加逐渐减少,到北极时为 2(此时的“太阳指路图”是一个单位圆.一般情形时可得到

$$y-\text{跨度}=(\pi-2|\theta|)/\cos\theta,\quad |\theta|\geqslant|\alpha|;$$

$$y-\text{跨度}=(\pi-2|\alpha|)/\cos\theta,\quad |\theta|\leqslant|\alpha|.$$

在文章开始处徒步者们提出的问题现在可以回答如下:只要 $|\theta|>|\alpha|$,他们就一定能回到家里,因为在这种情形时的“太阳指路图”上有一个重合点.

(朱学贤编译,潘承彪校)

赝币问题[1]

Bennet Manvel

在 1945 年 1 月的《美国数学月刊》上，E. D. Schell 提出了下述问题：

现有 8 枚同类硬币和一架天平，其中至多有一枚赝币，其重量轻于别的硬币. 怎样使用天平两次来测知这 8 枚硬币中有没有赝币；如果有，是哪一枚？

现在这类称重问题像魔方和 Möbius 带一样，已是传统趣味数学的一个部分，有趣的是，这类问题只是从 1945 年才开始提出的. Loyd，Ball，Dudeney 和 Kraitchik 的有关经典论著中并没有这类问题. Schell 所提问题引起了反响，有一阵在 *American Mathematical Monthly*，*Scripta Mathematica* 和 *Mathematical Gazette* 上曾刊载过一批论文，但其中都没有提到过有关 1945 年前发表的论著. 显然这类极为自然和很有趣的智力测验问题是最近的创作，而不像有人在 1961 年写的那样，是"不时地出现以使新一代解题者困惑和激动的"老掉牙的玩意(1961 年时这类问题还只有 15 年的经历！).

在 1945 年及其后几年中，以前所未闻的速度涌现的大量早期论文，从各个方面解答和推广了原来的问题. 本文提供的称重问题的几个变种，都是先前已解决过的，但这里的解法是独创的.

我们用的是外观相同的一堆硬币，还有一架天平. 我们的

---

[1] Counterfeit Coin Problems，*Mathematics Magazine*，**50**(1977)，90～92.

兴趣在于求出为找到赝币所必需的最小称重次数.所选的解法可能同时需要几种类型称重问题的解,因为所提问题在一次称重后或许会改变其特性.例如,用了一次天平后,我们会有一些肯定为真的硬币(如果天平平衡,它们在天平上,否则它们是剩下的硬币).这样,一次称重后就有与最初所提类型不同的问题.

我们把面临的问题分为两类:一类是已知赝币比真币轻;另一类是只知赝币重量与真币不同.文末还将考察没有赝币的可能性.眼下先假定只有一枚硬币不是真的.有时还将要求备有一枚其重量是正常的"标准"硬币.先从第一类问题开始.

定理 1 设 S 是一堆硬币,其中有一枚轻于其他各枚,而其他各枚重量相等,于是能够找出轻币的用天平称重的最少次数是满足 $3^{n-1}<|S|$[①]$\leqslant 3^n$ 的唯一的数 n.

证明 先假定 $|S|=3^n$,于是在第一次称时,把 S 分为数量相同各含 3^{n-1} 枚硬币的集合 S_1,S_2,S_3.把 S_1,S_2 置于天平两端.如果天平不平衡,则轻币在轻侧;否则轻币必在 S_3 中.不论哪种情形,我们把所提问题归结为在 3^{n-1} 个硬币中找出轻币的问题.由此继续,可知在 n 次称重后,定能找到轻币.如果 $|S|<3^n$,则在天平两端分别放置币数相同的两堆硬币 S_1,S_2,而使不放在天平上的硬币数至多为 3^{n-1},类似于上述的过程仍可进行.于是至多再重复 $n-1$ 次这样的步骤就可找出轻币.

另一方面,显然任何种类的一次称重都不会比把有嫌疑的一堆硬币分成三份更好,这是因为分成三份时,两堆放在天

---

① 我们用 $|S|$ 表示一堆硬币 S 中的硬币个数.——译者注

平上，一堆没有放在天平上，因而结果是仅能区分出哪一堆含有轻币. 这样，如果$|S|>3^{n-1}$，则为找出轻币，$n-1$次称重总是不够的.

现在把所考虑的问题改变一下，假定只有一枚赝币，其重量与真币不同，可能较重，也可能较轻. 为解答这个较难的问题，我们需要下述一般的考察，其结果乍一看有点奇怪.

引理 设S是一堆硬币，其中有一枚的重量与其他各枚不同，而其他各枚重量相同，我们把这一枚重量不同的硬币称为反常硬币，而其他的称为正常硬币. 再设每一枚上都标有"重的"或"轻的"，如果这枚硬币不比正常硬币轻或不比正常硬币重(显见，对正常硬币标上"重的"或"轻的"均可). 于是能够找出这枚反常硬币的用天平称重的最少次数是满足$3^{n-1}<|S|\leqslant 3^n$的唯一的n.

证明 此引理与定理1相似，定理1可看成每枚硬币都标有"轻的"，因为已知反常硬币较轻. 事实上，定理1中的称重过程在此处仍适用，但要加一个限制：在天平盘上放置硬币时，要保证两端放置相同数目的"轻的"币(因而也就是放了相同数目的"重的"币). 于是，如果$|S|=3^n$，就把S分为硬币数均为3^{n-1}的三堆S_1,S_2,S_3，在S_1,S_2中放数目相同的"轻的"币. 把S_1,S_2分别置于天平两端，如果一端(例如说S_1)较重，则赝币必在S_1的"重的"币或S_2的"轻的"币中，而它们，即S_1中的"重的"与S_2中的"轻的"合起来正好是3^{n-1}个. 如果天平平衡，则赝币当然在S_3中，而S_3含有3^{n-1}个硬币. 这样，在各种情况下，我们都像定理1中那样，把币数减少到原币数的1/3. 对于$|S|$不是3的整幂的情形，类似于定理1中所用的过程仍然有效.

上述引理是有用的，因为它描述了一般类型的称重问题，

如果我们只知道赝币重量有别于真币，那么，在首次出现不平衡的称重时，对天平上的硬币可正确地标上“重的”或“轻的”，即天平重的一边的硬币上都标上“重的”，轻的一边都标上“轻的”. 现在我们可以来解备有一枚标准硬币情形下的赝币问题了.

定理 2 给定一堆硬币 S、一枚标准硬币，假定 S 中有一枚硬币的重量异于其他各枚，而其他各枚均为标准重量，于是能够找出反常硬币的用天平称重的最少次数是满足 $(3^{n-1}-1)/2<|S|\leqslant(3^n-1)/2$ 的唯一的 n.

证明 以 $M(n)$ 表示通过 n 次称重可以解答的备有一枚标准硬币时的赝币问题中币数的最大值，本定理断言 $M(n)=(3^n-1)/2$. 易见，此断言当 $n=1$ 和 2 时为真.

现在假定给了一堆硬币 S 及一枚标准硬币，通过 n 次称重可从中找出反常硬币. 在首次称重时，我们从 S 中取出两堆硬币 S_1,S_2 使 $|S_1|=|S_2|+1$. 把 S_2 加上标准硬币，S_1,S_2 分置天平两端，剩下一堆 S_3. 如果天平平衡，我们会保留 S_3 及标准硬币. 为使此时问题可解，必须要求 $|S_3|\leqslant M(n-1)$. 另一方面，如果天平不平衡，我们会保留 S_1 和 S_2，且如前所说对其中每枚都正确地标上“重的”或“轻的”，因此为使 $n-1$ 次称重能从 S_1 和 S_2 中找出赝币，必须有 $|S_1|+|S_2|\leqslant 3^{n-1}$. 由于天平两端币数相等且其中有一枚标准硬币，显见在最大情况下恰有 $|S_1|+|S_2|=3^{n-1}$. 因而，如果天平不平衡，我们会保留 3^{n-1} 枚硬币，且每枚都可标上“重的”或“轻的”. 由引理得知此问题可解.

这样我们发现，如果 $|S|=(|S_1|+|S_2|)+|S_3|=3^{n-1}+M(n-1)$，我们能解出称重问题. 由此得到

$$M(n) = 3^{n-1} + M(n-1), M(n) = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i = (3^n - 1)/2.$$

定理 3 设 S 是币数多于 2 的一堆硬币，其中有一枚的重量异于其他各枚，而其他各枚重量相等，于是能够找出反常硬币的用天平称重的最少次数是满足 $(3^{n-1}-3)/2 < |S| \leqslant (3^n-3)/2$ 的唯一的 n.

证明 显然开始时必须在天平上比较两堆数目相同的硬币 S_1, S_2，剩下一堆 S_3. 如果天平不平衡，赝币在 $S_1 \cup S_2$ 中，且每枚可标上"重的"或"轻的"，由引理得 $|S_1 \cup S_2| \leqslant 3^{n-1}$. 由于两端必须放相同数目的硬币且不另外备有标准硬币，所以 $|S_1 \cup S_2|$ 的最大值实际上是 $3^{n-1}-1$(这时可从 S_3 中取出一枚作为标准硬币). 另一方面，如果天平平衡，我们会保留 S_3 以及(S_1 和 S_2 中的)某个标准硬币. 于是由定理 2，$|S_3|$ 最大可取 $(3^{n-1}-1)/2$. 把这些结果一并考虑，我们求出 $|S|$ 可等于 $(3^{n-1}-1)+(3^{n-1}-1)/2=(3^n-3)/2$，这正是要证明的结论.

定理 1 表明，从 k 枚硬币中，通过 $\lceil \log_3 k \rceil$ 次称重可以找出一枚轻币，其中 $\lceil x \rceil$ 表示大于或等于 x 的最小整数(注意它与 x 的整数部分 $[x]$ 不同，二者之间有关系式 $\lceil x \rceil = -[-x]$). 容易看出，备有一枚或几枚标准硬币并不减少称重次数，如果只知道赝币重量有别于真币，则如定理 3 中所证，需要 $\lceil \log_3(2k+3) \rceil$ 次称重. 然而在这种情形，有时用一枚标准硬币会有帮助，因为定理 2 断言如果备有一枚标准硬币，则需 $\lceil \log_3(2k+1) \rceil + 1$ 次称重.

上面讨论的都不是 Schell 原来提出的问题，Schell 的问题是一堆硬币中可能有一个赝币，也可能没有. 我们讨论的每个问题中都假定恰有一枚赝币. 容易看出，按照定理 1(赝币一定是轻的)中概述的过程，如果每次称重时天平都平衡，于

是恰留下一枚从未置放于天平上.如果并不确知是否有赝币,就不好肯定这最后一枚硬币的真伪!于是在这种情形,通过n次称重能处置的币数恰少一枚,即(3^n-1)枚.对于“反常”硬币(即不确知赝币是轻还是重的情形)所概述的过程则没有这样的问题,因为如果所有硬币重量都相等,那么它们最终都会置放到天平上.

(沈永欢译,潘承彪校)

参 考 文 献

[1] *American Mathematical Monthly*: 1945 (42, E. D. Schell; 397, M. Dernham), 1946(156, D. Eves; 278, N. J. Fine), 1947(46, E. D. Schell; 48, J. Rosenbaum).

[2] *Mathematical Gazette*: 1945 (227, R. L. Goodstein), 1946 (231, F. S. Dyson), 1947(31, C. A. B. Smith).

[3] *Scripta Mathematica*: 1945 (360, H. D. Grossman; 361, L. Withington, Jr.), 1948(66, C. W. Raine; 67, K. Itkin; 69, H. D. Grossman).

美钞的一边长是无理数①

Rick Norwood

这里介绍一种技巧，可将一美元的纸币先叠成一个等边三角形，然后再叠成一个正棱锥.

第一步：将纸币横向对折，压出折痕，然后展开，正面（即有人头像的面）朝上，平放在桌子上，见图 1.

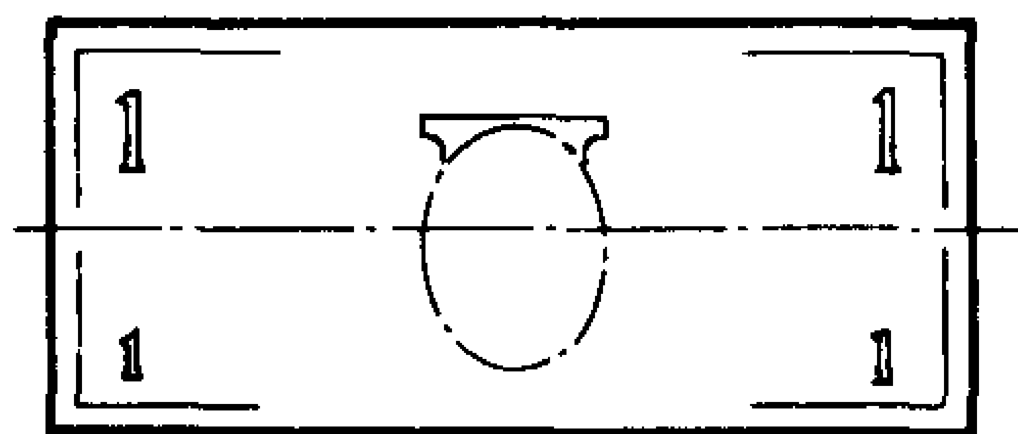


图 1

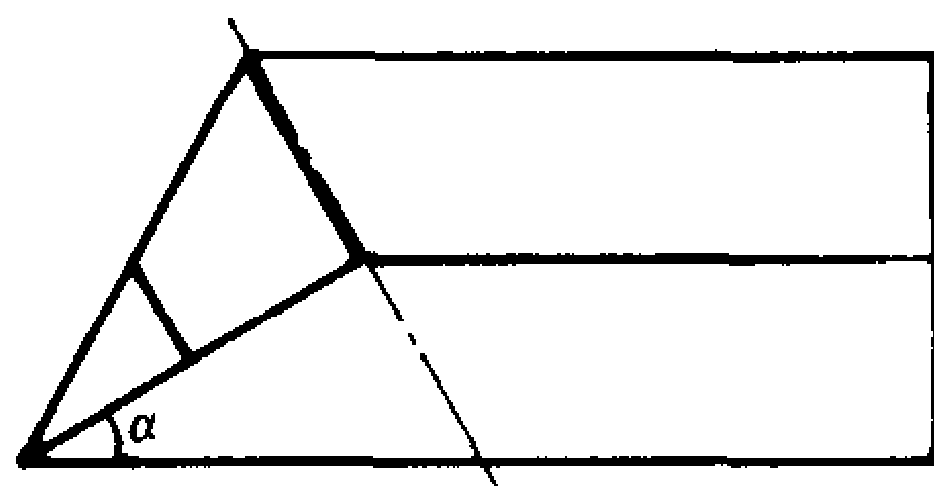


图 2

第二步：将左上角往下折，使其正好落在纸币中间的折痕上，如图 2 所示. 用平面几何的初等知识易证所得三角形的 3 个内角分别是 30°、60°和 90°（提示：$\angle\alpha=30°$）.

第三步：沿图 2 中的虚线，将纸币的左下角往上折，则它正好落在纸币的上边缘上，见图 3.

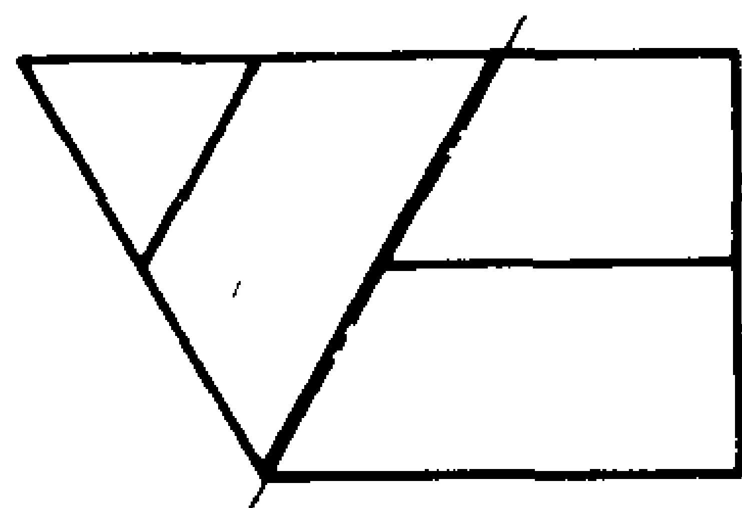


图 3

第四步：沿图 3 中的虚线，将纸

① 编译自 Rick Norwood 的文章“Money is irrational”，引自 *Math. Magazine*，**61**(1988)，No. **2**，101～102.

币的左上角往下折，见图 4. 可以看到，它与纸币的右下角正好(或差不多正好)重合.

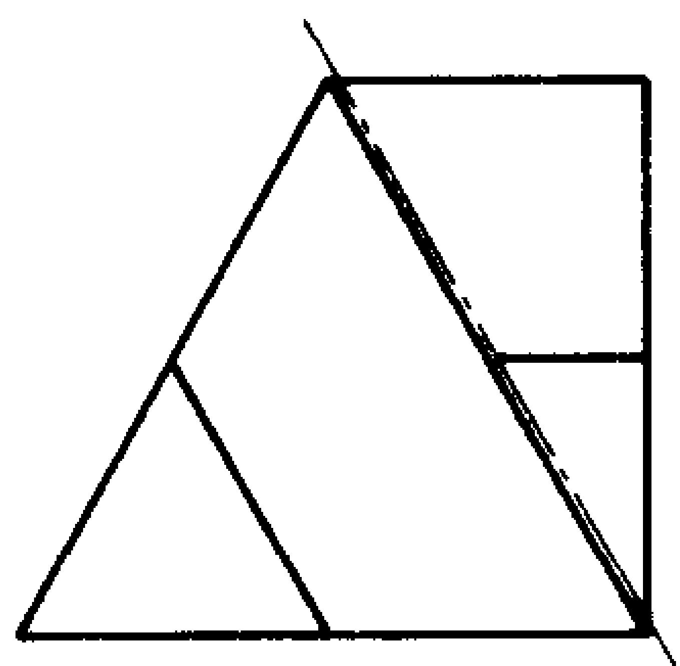


图 4

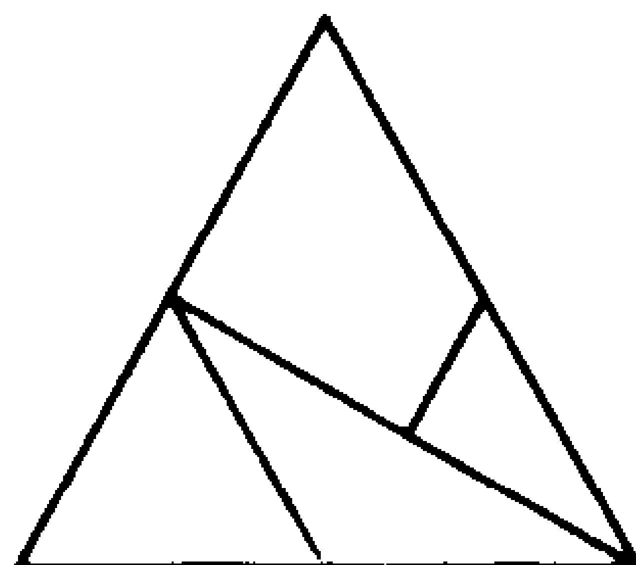


图 5

第五步：沿图 4 中的虚线，将右上角往里折，正好形成一个等边三角形，见图 5.

上述折叠过程说明了：一美元纸币的宽与长之比，非常近似地等于等边三角形的高与其底边的 2 倍的比，即无理比 $\sqrt{3}:4$.

如果所有的折痕都很清晰，则将折好的图形慢慢展开，放在桌上，就得到一个正棱锥(每个面都是一个等边三角形)，见图 6.

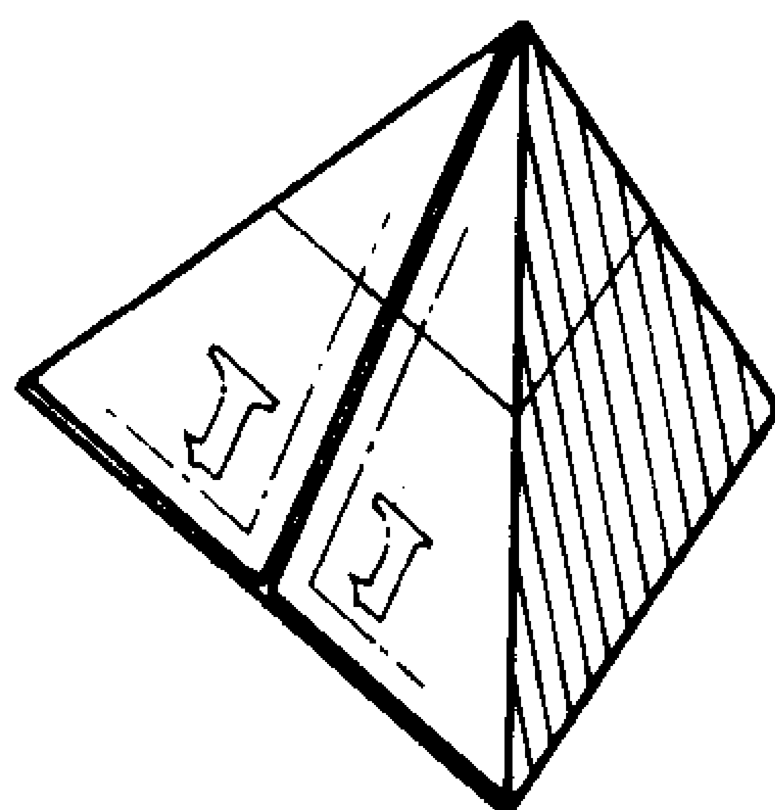


图 6

(朱学贤编译，刘勇校)

红 绿 灯[①]

J. I. Katz

1. 问题

任何一个骑车人或司机都有过这样的经历，在驶上一条弯道或一段上坡路时，看到前方不远处的交通灯是红灯，但相距的距离又使你没有必要去踩刹车，懒一点的骑车人或比较节俭的司机都会考虑是否可以保持某种速度前进，指望到达交通路口时已变为绿灯，这当然是为了避免不必要的能量损耗并节省体力或燃料. 在一开始看到绿灯时也会产生类似的问题，因为在到达路口前交通灯可能会变成红灯，所以驾车人必须考虑加速(如果是合法的)的代价是否可以保证增加在交通灯变成红色之前通过路口的机会.

这一问题初看起来似乎十分简单，但是进一步的深究揭示出几种参数体系和各种复杂性. 本文提供的关于这一问题最重要情形的分析尽管可能是显而易见的，但颇具启发性. 这一解法尽管事后看来十分明显，但一开始接触时并不尽然. 问题的实际情况依赖于许多因素，其中的一些我们知之甚少. 为此，我们作如下的简化假定. 假定路是平坦的，车的行驶无摩擦、无空气阻力或者其他损耗；假定车可以做任意瞬时的正的或负的加速；又假定车的推动力的能效是常量，但刹车中的动

---

① 编译自 J. I. Katz 的“How to approach a traffic light”，*Math. Magazine*，**63**(1990)，226～230.

能损耗是不能恢复的.在发动机空载和骑车的相应状态中没有能量消耗,这等价于假定目标是不考虑时间的最优化能量耗费.交通灯规律性地以周期 T 重复,红灯持续时间为 t_r 而绿灯持续时间为 t_g,$T=t_r+t_g$.这些参数都假定已知,但是除去交通灯的颜色外,首次看到时它处于某个周期中的那一时刻是未知而且随机的.我们假定骑车人或开车人知道自己的行车速度和离交通灯的距离.这种模型当然是任意的,但又比较容易分析,而且可以为更复杂和更真实的模型提供一种定性的指导.

关于交通流量问题的讨论有大量的参考文献(参见 Montroll and Badger[2]或 Haberman[1]),但是单车机械能量最优化问题似乎没有被讨论过.

2. 计算

先考虑首次看到的是红灯的情形.利用表示时间变化的数轴(图 1)可对问题作最佳的分析.车辆以速度 v 向前行驶,在距离 d 处看到交通灯.我们要计算 t 时刻后交通灯变成绿色的概率 P_g,其中 $t=d/v$ 是以匀速 v 前进到达交通灯所需的时间.注意,t 是此问题的一个参数但不是随机变量.

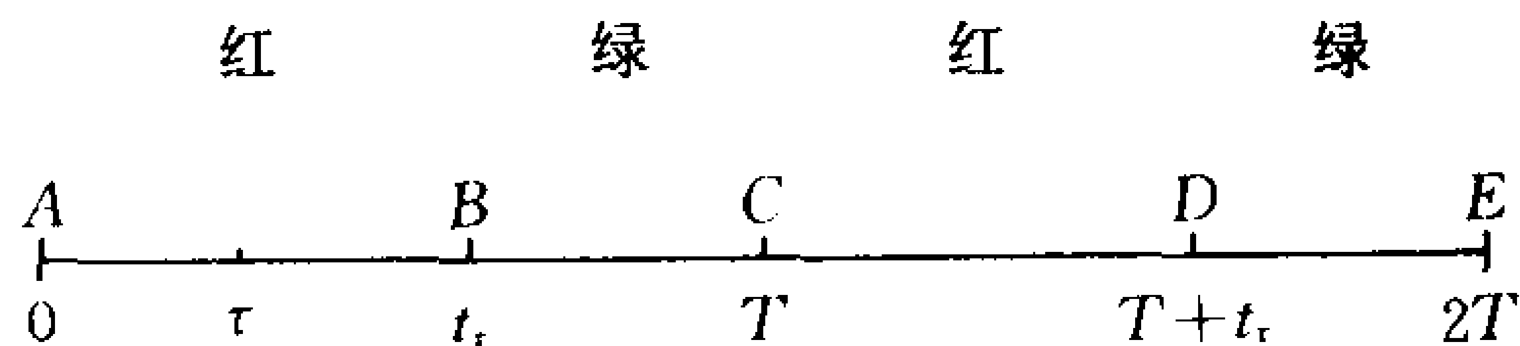


图 1 观测红色交通灯的时间数轴

首先用 $t'=t-nT$(n 是使得 $t'\geqslant 0$ 的可能取的最大整数)取代 t.因为假定了交通灯的显示周期为 T,所以这样做是允

许的. 于是,我们可以只考虑图 1 中所示的起始两个周期的一段时间数轴,其原点取为交通灯由绿变红的时刻. 图中的变量为 $t'+\tau$,t'和 τ 都在 0 到 T 之间变化,因此只需考虑 0 到 $2T$ 之间的时间数轴.

设骑车人或司机在某个周期[①]中的时刻 $\tau(0<\tau<t_r)$看到红色交通灯(τ 为在 AB 区间上均匀分布的随机变量),而在时间数轴上的 $t'+\tau$ 时刻到达路口. 我们必须计算使得时刻 $t'+\tau$ 位于 BC 上的那一部分可能的 τ 的值(由于 $\tau<t_r$,因此对于 $t'<T$,$t'+\tau$ 不可能在 DE 上). 我们分如下几种情形讨论:

(a) 如果 $t'<t_r$ 且 $t'<t_g$,那么对于 $t_r-t'<\tau<t_r$,$t'+\tau$ 将在 BC 中. 这种情形发生的概率为

$$\frac{t_r-(t_r-t')}{t_r}=\frac{t'}{t_r}.$$

(b) 如果 $t'<t_r$ 且 $t'\geqslant t_g$,那么对于 $t_r-t'<\tau<T-t'$,$t'+\tau$ 将在 BC 中. 这种情形发生的概率为

$$\frac{(T-t')-(t_r-t')}{t_r}=\frac{t_g}{t_r}.$$

(c) 如果 $t'\geqslant t_r$ 且 $t'<t_g$,那么对于 $0<\tau<t_r$ 有 $t'+\tau$ 将在 BC 中,这种情形发生的概率为 1.

(d) 如果 $t'\geqslant t_r$ 且 $t'\geqslant t_g$,那么对于 $0<\tau<T-t'$ 有 $t'+\tau$ 将在 BC 中. 这种情形发生的概率为$\dfrac{T-t'}{t_r}$.

注意,对于具有 $t_g>t_r$ 的交通灯的情形(b)不可能发生,而若 $t_g<t_r$ 则情形(c)不可能发生.

上述 4 种情形可总结为如下的概率表(见表 1). 在表 1

---

① 在图 1 中标在第一个周期 $0\sim T$ 中,由周期性知这也是可以的.
——译者注

中，第一行包含情形(a)和(c)，而第二行包含情形(b)和(d). 注意到对应于特殊情形 $t_g=T/2$ 的概率值只可能是下表中的左上角或右下角所列值. 前者适用于 $t'<T/2$ 的情形而后者适用于 $t'>T/2$. 我们把最初看到的是绿灯的类似结果列成表 2.

表 1　最初看到的是红灯而到达时为绿灯的概率

	$t'<t_r$	$t'\geqslant t_r$
$t'<t_g$	$\frac{t'}{t_r}$	1
$t'\geqslant t_g$	$\frac{t_g}{t_r}$	$\frac{T-t'}{t_r}$

表 2　最初看到的是绿灯而到达时也为绿灯的概率

	$t'<t_r$	$t'\geqslant t_r$
$t'<t_g$	$\frac{t_g-t'}{t_g}$	$\frac{t_g-t_r}{t_g}$
$t'\geqslant t_g$	0	$\frac{t'-t_r}{t_g}$

在下面的图 2 中我们把表 1 和表 2 中出现的各种参数表示成 t_g 和 t' 的函数①. 此图形是表 1 和表 2 中各个情形所对应的各参数之间关系的一种方便的图示. 例如，出现表 1 中“左上”情形 $P_g=t'/t_r$ 时，参数 t_g 和 t' 就落在标有“左上”的三角形区域中，其他类似. 图 3 展示了最初看到的是红灯而到达时为绿灯的概率 P_g 的可能形式，而对于最初看到的是绿灯到达时也为绿灯的相应图形是类似的，并且可利用表 2 画出.

---

① 因为 $t_g+t_r=T$. ——译者注

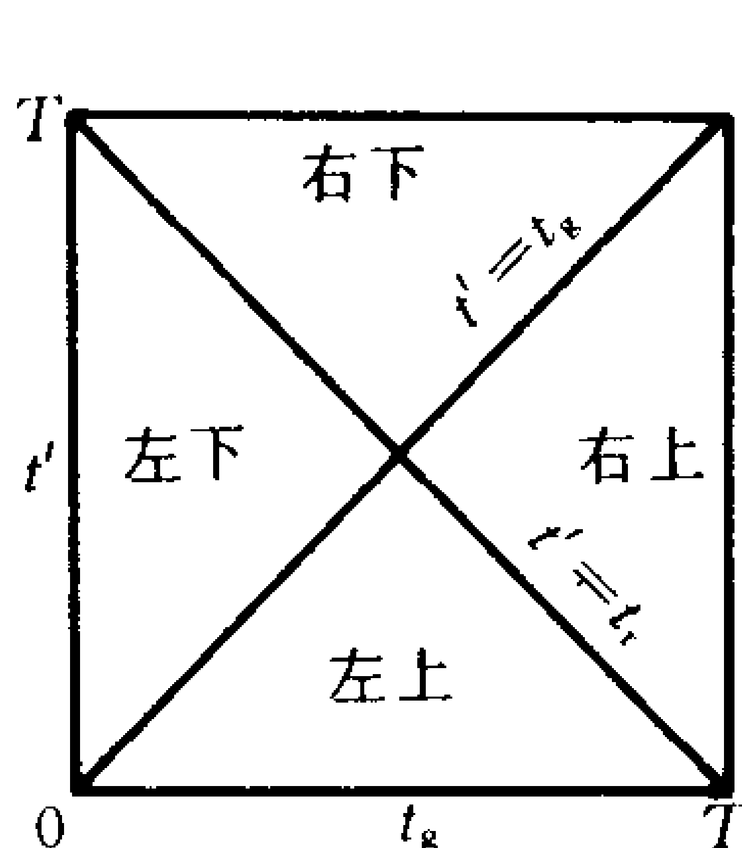


图 2　作为 t' 和 t_g 的函数的参数分类图示. 参数落入标有“左上”,“右上”,……的三角形区域时,在表 1 和表 2 中就出现相应的在“左上”,“右上”,……的情形.

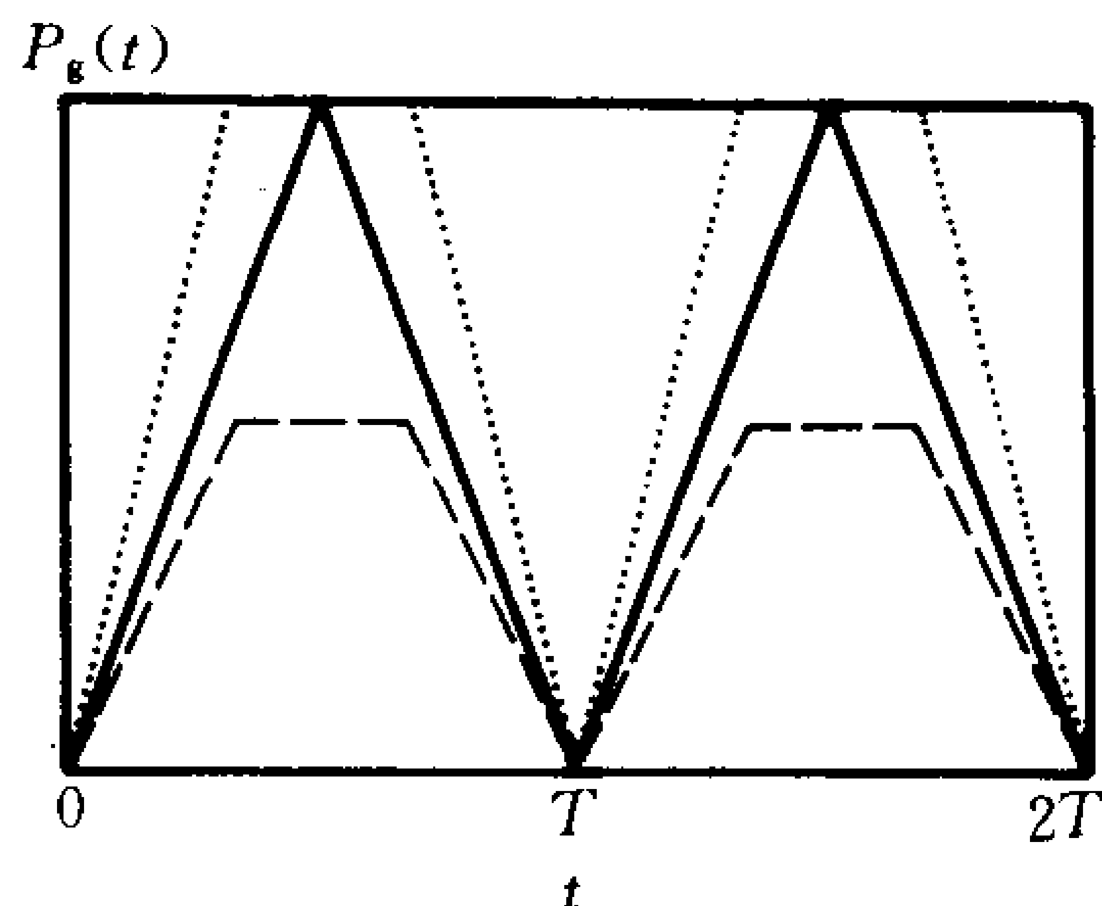


图 3　$P_g(t)$ 为初始看到红灯对应的概率. 实心线对应于 $t_g = T/2$ 的情形,破折号线对应于 $t_g = T/3$ 的情形,而点线对应于 $t_g = 2T/3$ 情形. 这些曲线都以周期 T 无限重复.

3. 结果

考虑最初看到的是红灯的情形. 我们采取这样一种策略:车辆瞬时从初始速度 v_0 降为 v,然后匀速行驶. 在此策略中记 E_k 为剩余平均动能,而车辆借助此能量匀速通过交通路口. 对于质量为 m 的车辆有

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2P_g(t). \tag{1}$$

我们希望极大化 E_k. 对于表 1 左上角部分中的 t' 值,P_g 为 v 的递减函数(由于 t' 为 v 的递减函数),因此,微小的速度减小可以增大 E_k. 用 P_g 的表达式(利用 t' 和 t 的定义)代替(1)中的 $P_g(t)$ 得到

$$E_k = \frac{1}{2}\frac{m}{t_r}(vd - nTv^2). \tag{2}$$

在表 1 的其余三个部分中,P_g 是 v 的非减函数,故对于任意的 n 减速总是不利的.

对于 $n=0$(实际中最常见的情形),即使在对应于表 1 的左上角部分的情形,E_k 也为 v 的递增函数. 这时结论是明确的,即不要由于最初看到的是红灯而减速. 这是因为动能的损失在价值上远远超过所增加的到达时刻为绿灯的机会.

对于 $n\geqslant 1$,对应于离交通灯较远(或车速较慢)的情形,结论是不同的. 在表 1 的左上角部分,E_k 为 v 的递减函数(t 的递增函数). 此时立即刹车使 t' 增大到比 t_g 和 t_r 小的值是有利的. 这不是大幅度的减速,而且它决不超过其在 $t_g=T/2$ 和 $t'=0$ 时的值. 在此情形,速度变化为原来的 $1/(2n+1)$. 这种减速使得参数落在表 1 中其余三个四分之一部分的边界上,因此进一步的减速是不利的(对于任意的 n).

如果最初 t' 在表 1 中的右下角部分(对应于图 3 中曲线中的负斜率),那么

$$E_k=\frac{1}{2}\frac{m}{t_r}[(n+1)v^2T-vd]. \tag{3}$$

明显有 $\frac{dE_k}{dv}>0$,而且再小的减速也将是不利的. 然而,把 n 增加 1,并且置 t 于表 1 的左上角部分的有限减速可能是有利的. 这一意外结果产生的原因在于 $P_g(t)$ 在 $t=T$ 取到极小值. v 的减少(或 t 的增加)可能使 P_g 达到其最大值且总的来讲是增加 E_k 的值. 要决定是否对于参数的任意特定值都如此,还需要一些代数理论.

如果最初的 t' 是在表 1 中的右上角或左下角部分,那么 P_g 取到其最大值并且最优策略是不加速.

对于永恒绿灯(即 $t_g=T,t_r=0,P_g=1$)的平凡情形,检查

一下上述理论是有益的. 在此平凡情形，由(1)知 $E_k=mv^2/2$. E_k 明显地通过保持最初速度达到最大值(因为永不需要停车，任何减速都将是完全没有必要的能量耗费).

最初看到的是绿灯的问题非常近似于刚讨论过的情形. 其对应的概率值列在表 2 中. 最常见的情形是 $n=0$ 的左上角部分情形，在此情形时加速俗称为抢行. 由于此时 P_g 为 t 的递减函数，因此减速显然是不利的. 为了决定加速是否有利，需要考虑冒着到时为红灯的风险以速度 v 行驶的车辆的动能的平均损耗 C

$$C=\frac{1}{2}mv^2[1-P_g(t)]. \tag{4}$$

处理到达时为红灯的耗费比处理通过绿灯的剩余动能更方便，因为前者更便于考虑在从初始速度到 v 的加速过程中所需要的任何附加功能. 对于通常情形：$n=0$，由表 2 中左上角部分 P_g 的表达式有

$$C=\frac{1}{2}\frac{mvd}{t_g}. \tag{5}$$

显然，为了增加到达时为绿灯的机会而增加速度 v 是不利的. 再加上如果在通过绿色交通灯后增加的动能必须耗散掉而不是有效地加以利用，那么加速将是更加不利. 在 $n\geqslant 1$ 和表 2 中其他三个部分的问题更加复杂一些，但是可以将其看成初始观测为红灯的情形的类似问题进行处理.

对于初始看到红灯的情形，如果 t' 和 t_g 对应于表 1 的右下角部分，那么加速可能是有利的. 这一明显自相矛盾的结论是由于在这一参数体系中 P_g 随着 v 的增大(t 减少)而增大. 定义加速的平均损耗如(4)，那么可知：若 $t<2t_g$，则对于 $n=0$ 及在表 1 中右下角这四分之一部分，加速是有利的，并且对

于 $n \geqslant 1$ 的情形，加速总是有利的.

如果考虑到在看到交通灯后的信息的累积，我们可得到代数性更加复杂的结果. 一旦在某一时刻看到红灯或绿灯，那么观测者在交通灯的这一周期中的位置也就确定了，并且对于最初看到是红灯或绿灯的不同情形，其对应的到达交通路口为绿灯的概率是不同的. 这一附加信息的利用可以稍微降低 C 值或增大 E_k 值，但不改变原始问题的处理. 一旦观测到颜色变化，问题变成非随机的和决定最优速度的简单代数.

4. 结论

即使作了几种简化的物理假定，决定用于驶近在某周期的一个未知位置看到的交通灯的最优能效策略问题仍然是极其复杂，而且由一些令人困惑的特殊情形组成. 幸运的是实际中常见到的情形往往是最简单的. 在典型的市郊地区的非正式调查发现所考虑的值的代表为：$t_g=40$ 秒，$T=100$ 秒，$v=48$ 千米/小时，而 $d=0.4$ 千米(因为存在允许左转而且禁止对向行驶的时间段，所以有 $t_r>t_g$). 这样 $t=30$ 秒，$n=0$，表 1 与表 2 的左上角部分的值适用于市郊地区的情形. 在市区，d 和 t 通常更小，而在乡村地区，通常较大的 d 伴随有较大的 v，而且这时交通灯比较稀疏. 因此，在多数情形可用的结果是简单的：预料要见到红灯时不要减速，或者加速抢行. 另一种方法是滑行到交通灯前(或者安全地停在离交通灯有一段距离的地方)或者滑行等到交通灯变为绿灯.

在现实生活中，由于摩擦和其他车辆的存在使得问题复杂化. 在多数情形，滑行可能应被解释为保持常速，而这非最好的能效策略. 在此策略中，车辆会由于摩擦减速但是避免了在街区中间刹车的不便. 主要的例外是在比滑行距离短(在考

虑有摩擦的情况下)的地方看到红灯的情形．在此情形，由于保持常速使得既耗能又降低 P_g，因此在有摩擦影响时滑行是不可取的．

在我们的假定下，严格说最佳能效策略是用无穷长的时间以无穷小的速度行驶．但是实际情况拒绝这种做法，而通过极大化同为时间和燃料耗费的递减函数的“效用函数”(经济学术语)来选择慢行速度 v．这样一来，仅当立即面对红绿灯且需要紧急刹车时才值得考虑动能的值，并且我们的不考虑时间极小化能量耗费模型是有效的．

存在一类似问题，其目的是不考虑能量损耗极小化过程．对于驾驶汽车的人，这儿有一完全显而易见的解答：即总以允许的最大速度行驶．骑车人的行驶速度受其复杂的生理因素限制，结果是能量的浪费将减弱紧接而来的加速或速度．如果定量化这些限制，那么我们可数值化地得到最佳策略．当然，有经验的骑车人对这样一种策略可能有来自经验的好的直观理解．

(李贵斌编译，朱学贤校)

参 考 文 献

[1] R. Haberman, Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population, Dynamics and Traffic Flow, An Introduction to Applied Mathematics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1977.

[2] E. W. Montrolland W. W. Badger, Quantitative Aspects of Social Phenomena, Gordon and Breach, London, 1974.

在电话中扔硬币决胜负[1][2]

Charles Vanden Eynden

甲、乙两人分处两地，在电话中为一件事上谁有优先权而僵持不下，最后决定用扔硬币猜正反面的方式来解决. 甲要乙去甲所在地，乙要甲去乙所在地，但谁也不愿意动. 这时甲对乙说："也许我们可以谁都不动. 干脆我在这儿扔一枚硬币，然后你来说哪一面朝上. "乙问："我怎么知道我赢了还是输了?"甲回答："由我来告诉你!"乙稍停了一会儿，然后对甲说："这主意太棒了，不过你不用麻烦了. 我手头正好有一枚硬币，我已把它扔在桌上. 你说吧，国徽面朝上还是币值面朝上?"于是甲回答："看来我们只能在一个中间地点见面来决胜负了. "

本文目的就是要解释怎样通过电话来猜硬币哪面向上，使得双方都满意，一切都诚实无欺地进行. 首先我将说明双方如何进行(可称为"协议")，然后解释所涉及的数学(只用到初等数论)，包括所用的实际计算方法，以及为什么双方都认定这样猜法是公平的.

协议 参加者为甲、乙两人. 甲先开始，取两个不同的形如 $4k+3$ 的大素数 $p>q$，并计算 $n=pq$，然后告诉乙 n 的值.

现在轮到乙. 他在 0 与 n 之间取一个与 n 互素的整数 x，

---

① Flipping a Coin over the Telephone, *Mathematics Magazine*, **62**(1989), 167～172.

② 本文是所谓"公开密钥码"方法的一个通俗解释. 这一方法的基础是数论中著名问题大数分解(参看本丛书第 2,3 册中的"因子分解与素数判定"一文)，阅读本文需要一点初等数论知识. ——译者注

并求一个数 a，使它满足 $x^2 \equiv a(\mathrm{mod}\ n)$，$0<a<n$，即 a 是 x^2 除以 n 所得的余数（x 与 n 互素可通过计算 x 与 n 的最大公约数来检验.）. 这一步相当于扔硬币. 乙告诉甲 a 的值.

甲听到乙说的 a 的值后，求出所有满足

$$t^2 \equiv a(\mathrm{mod}\ n), \quad 0 < t < n \tag{1}$$

的整数 t. 可证明这样的 t 恰有 4 个，其中两个是 x 与$n-x$，另外两个则不同. 甲在这 4 个数中选一个 y，并告诉乙. 这相当于告诉乙硬币哪一面向上. 如果 y 或 $n-y$ 等于 x，甲胜；否则乙胜. 在第二种情形，乙得通过告诉甲 x 的值（它既非 y，也非 $n-y$）来证明他获胜.

例子 我们以较小的数来说明上述协议，虽然实际上用的数总是要大得多，甲选素数 $p=23$，$q=31$，并告诉乙数值 $n=23\times31=713$. 乙随便地取一个数 $x=220$，计算出 $x^2=48400\equiv629(\mathrm{mod}\ 713)$，并反过来告诉甲数值 $a=629$. 注意乙知道

$$t^2 \equiv 629(\mathrm{mod}\ 713), \quad 0 < t < 713 \tag{2}$$

的两个解 220 与 $493=713-220$.

现在甲用他**已知的因数分解** $713=23\times31$ 来计算(2)的所有解（稍后将解释他的计算方法）. 他得到解 $t=59,220,493,654$. 由于 $493\equiv-220(\mathrm{mod}\ 713)$，$654\equiv-59(\mathrm{mod}\ 713)$，这四个解可以分为两对. 甲并不知道乙是从 220，493 这一对还是从 59，654 这一对开始的. 如果甲选 220 或 493，他获胜，如果他选 59 或 654，他失利.

为何乙无法欺骗? 通过电话扔币的明显问题是扔硬币的人可以欺骗，不管硬币哪一面向上，他都可以说对方猜错了. 在上述协议中，乙相当于扔币者. 为什么他不能不管甲说的 y 而宣布甲错了呢?

协议规定乙通过告诉对方他最初取的 x 的值并非 y 或者 $n-y$ 来证明甲错了. 为什么乙不能也把(1)的所有四个解计算出来,然后说他最初取的 x 是这四个解中并非 y 或 $n-y$ 的哪两个之一?

答案在于乙需要知道 n 的因子来计算其余两个解. 如我们在下节中将要证明的,事实上知道异于 y 或 $n-y$ 的一个解等价于分解 n. 实际进行时,p 与 q 总是选得很大,可能每个都是十进制的 100 位数,使得 n 大约为十进制的 200 位. 现在还没有分解很大的数的有效方法,虽然数学家对这个问题已研究了几个世纪. 用迄今已知的适用于最快计算机的最有效的方法,分解一个 200 位数得用几百万年. 因为乙不能分解 n,他只知道他所提的(1)的解 x 以及与之配对的 $n-x$,他就无法欺骗.

易见,如果知道同余式(1)的第三个解,就能分解 n. 因为,假定 y 是(1)的解且对模 n 既不同余于 x,也不同余于 $-x$. 由

$$y^2 \equiv a \equiv x^2 \pmod{n},$$

得 $n=pq$ 整除 $y^2-x^2=(y-x)(y+x)$. 如果 n 整除 $y-x$,则 $y\equiv x \pmod{n}$,与假定矛盾. 同理,n 不能整除 $y+x$. 由此可见,p 整除 $y-x$ 与 $y+x$ 之一而 q 整除另一个,因而,$n=pq$ 与 $y-x$ 的最大公约数必为 p 或 q. 这样就可对 n 与 $y-x$ 用欧几里得算法来求出 n 的一个因数. 如我们在下节中所说,即使对 200 位的大数,欧几里得算法也能很快算出结果.

用上面举的例子来说明. 假定甲说 $y=59$,则 $y-x=59-220=-161$,很快算出 -161 与 713 的最大公约数是 23,这就是因子 p.

欧几里得算法的效率 欧几里得算法使我们得以计算整

数 $u,v(v>0)$ 的最大公约数. 写出

$$\begin{aligned} u &= vq_1 + r_1, \quad 0 < r_1 < v, \\ v &= r_1q_2 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1}, \end{aligned} \tag{3}$$

其中 r_n 是最后一个非零余数,则熟知 r_n 即为 u 与 v 的最大公约数.

定理 1 如果对整数 u 与 $v(0<v<u)$ 用欧几里得算法,则所需除法次数不大于 $2\log_2 u$.

证明 只须证明 $r_1<u/2$,从而方程(3)左边的数在每隔两次除法后至少以 1/2 的速率递减. 如果 $v\leqslant u/2$,由 $r_1<v$,这是显然的;如果 $v>u/2$,则 $r_1=u-vq_1\leqslant u-v<u-u/2=u/2$.

虽然 Lamé 于 1844 年证明欧几里得算法中除法的次数不大于 u 与 v 中较小数的十进位位数的 5 倍,但就我们的目的而言,定理 1 就够了. 例如,定理 1 表明对两个不多于 200 位的十进位数进行欧几里得算法运算,则所需除法次数不超过 $2\log_2 10^{200}=400\log_2 10<1400$. 这样的运算在计算机上不到一秒钟即可做完.

下一节中将用到下述事实:用欧几里得算法也能求出整数 α,β,使得 $\alpha u+\beta v=d$,其中 $d=(u,v)$,令 $\alpha_{-1}=\beta_0=1,\alpha_0=\beta_{-1}=0$,且对 $i\geqslant 1$,

$$\alpha_i = \alpha_{i-2} - q_i\alpha_{i-1}, \quad \beta_i = \beta_{i-2} - q_i\beta_{i-1},$$

就能很好地在计算机上操作. 由归纳法容易证 $r_i=\alpha_i u+\beta_i v$ $(i>0)$,于是特别地有 $\alpha_n u+\beta_n v=r_n=d$. 当应用欧几里得算法时,$\{\alpha_i\}$ 和 $\{\beta_i\}$ 可以同时递归地算出. 由于计算每个 α 与 β

需要一次乘法和一次减法，所要执行的四则运算总数是单独使用欧几里得算法所需运算总数的 5 倍，因而这样的计算仍然是很快的.

以 $u=31, v=23$ 为例来说明(为什么选这两个数，看了下文就会明白). 由欧几里得算法，

$$31=1\times 23+8,$$
$$23=2\times 8+7,$$
$$8=1\times 7+1,$$

于是 $q_1=1, q_2=2, q_3=1$，从而 $\alpha_1=\alpha_{-1}-q_1\alpha_0=1-1\times 0=1$，类似地，$\alpha_2=0-2\times 1=-2, \alpha_3=1-1(-2)=3$. 同样有 $\beta_1=-1, \beta_2=3, \beta_3=-4$. 这样，

$$1=(31,23)=3\times 31+(-4)\times 23.$$

甲算得出来吗? 上述协议的公正性基于当 n 是 200 位数时，乙不可能算出(1)的另外两个解. 读者也许会想，甲能不能算出所有 4 个解，即使他知道 n 的因数分解. 当然，对于这么大的数，计算机是必需的；但对乙而言，即使有世界上运算最快的计算机，对分解 n 也无济于事. 本节中解释甲要用的方法，这个方法只用到初等数论. 我们不仅应说明所述算法确能算出，而且还必须说明它用于大数 n 时所需的时间也是合理的.

甲的方法是讨论以下两个同余方程：

$$\gamma^2\equiv a\ (\mathrm{mod}\ p),\quad \delta^2\equiv a\ (\mathrm{mod}\ q).\tag{4}$$

分别求出(4)中每个二次同余方程的两个不同余的解，然后用孙子定理得到所需的(1)的四个解. 下述定理是 Fermat 定理(若 p 为素数且 p 不整除 ξ，则 $\xi^{p-1}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \gamma)$)的简单推论.

定理 2 设 $p=4k+3$ 是素数且不整除 a. 若 $\xi^2\equiv a\ (\mathrm{mod}\ p)$有解，则 a^{k+1}是 $\gamma^2\equiv a\ (\mathrm{mod}\ p)$的一个解.

我们规定素数 p,q 都取 $4k+3$ 的形式，因此理论上可用定理 2 计算(4)中每个同余方程的解. 然而，由于 $k+1$ 可以是 100 位数，因此需要特别关注一下 a^{k+1} 模 p 的计算. 其实这种计算可以用下面的相当有效的方法来做. 先把 $k+1$ 写成二进制形式，设

$$k+1=b_m2^m+b_{m-1}2^{m-1}+\cdots+b_0,$$

其中 b_i 等于 0 或 1. 算出 $\{b_i\}$ 的一个方法是从 $k+1$ 开始，相继用 2 去除，留下的余数就是 $b_0,b_1,\cdots,b_m$. 注意到 $m<\log_2 10^{100}<400$，因而所需除法次数不多于 400，现在

$$a^{k+1}=a^{b_0}(a^2)^{b_1}(a^4)^{b_2}\cdots(a^{2^m})^{b_m}, \tag{5}$$

用逐次平方并逐次模 p 化简来计算 $a^2,a^4,\cdots,a^{2^m} \pmod p$，这至多需要 800 次乘法和除法. 最后用逐次相乘并且模 p 化简来计算(5)的右边，这至多需要 800 次运算. 注意在这些运算中从来不用处理大于 p^2 的数.

我们用解 $\gamma^2\equiv 629 \pmod{23}$ 说明上述方法. $p=4\times 5+3$，故 $k=5,k+1=6$. 由 $6=2\times 3+0,3=2\times 1+1,1=2\times 0+1$，得 $6=0\times 2^0+1\times 2^1+1\times 2^2$. 由

$$a=629\equiv 8 \pmod{23},$$

$$a^2\equiv 64\equiv 18 \pmod{23},$$

$$a^4\equiv 18^2=324\equiv 2 \pmod{23},$$

得 $a^{k+1}=a^6=a^2a^4\equiv 18\times 2=36\equiv 13 \pmod{23}$，从而得到解 $\gamma=13$. 建议读者用同样方法解同余式 $\delta^2\equiv 629 \pmod{31}$，其解为 $\delta=28$.

甲用上述方法求出满足(4)的整数 γ 与 δ. 他还用早先解释过的欧几里得算法求出整数 α,β，满足

$$\alpha p+\beta q=1. \tag{6}$$

现在考虑 4 个数

$$t = \pm \delta\alpha p \pm \gamma\beta q, \tag{7}$$

其中正负号分别独立选取，容易验证这四个数中任何两个均不模 n 同余，还有

$$t^2 \equiv (\pm \gamma\beta q)^2 \equiv \gamma^2(\beta q)^2 \equiv a \cdot 1^2 \equiv a \pmod p,$$

这里用到了(4)和(6)，类似地有 $t^2 \equiv a \pmod q$，由于不相等的素数 p 与 q 都整除 t^2-a，因而 $n=pq$ 整除 t^2-a，这表明 t 是(1)的解. 这样，(7)给出了甲所需的同余方程(1)的四个解.

在我们所举的例子中，(6)是 $23\alpha+31\beta=1$，我们已算出其解为 $\alpha=-4, \beta=3$. 我们也已求出(4)的解 $\gamma=13, \delta=28$. 于是

$$\begin{aligned}\pm \delta\alpha p \pm \gamma\beta q &= \pm 28(-4)23 \pm 13 \times 3 \times 31 \\ &= \pm 3785 \pm 1367 \\ &\equiv 654, 59, 220, 493 \pmod{713}.\end{aligned}$$

我们没有谈到怎样找出负值素数 p 与 q. 已经证实，确定一个大数是素数，比分解同样位数的大数要快得多.

（沈永欢编译，潘承彪校）

参 考 文 献

[1] Manuel Blum, Coin flipping by telephone——a protocol for solving impossible problems. *Proc. IEEE Spring Comp. Conf.* (1982), 133～137.

[2] John Brillhart, D. H. Lehmer. J. L. Selfridge, Bryant Tuckerman, and S. S. Wagstaff Jr., Factorizations of $b^n \pm 1$, *Amer. Math. Soc.*, 1983.

[3] Donald E. Knuth, The Art of Computer Programming. Vol. **2**, Seminumerical Algorithms, 2nd ed., Addison-Wesley, 1981.

[4] D. H. Lehmer, Computer technology applied to the theory of numbers, in Studies in Number Theory, W. J. LeVeque, ed., MAA, 1969.

[5] Ivan Niven and H. S. Zuckerman, The Theory of Numbers, 4th ed, Wiley,

1980.

[6] Carl Pomerance, Lecture Notes on Primality Testing and Factoring, MAA, 1984.

[7] Kenneth H. Rosen, Elementary Number Theory and Its Applications, Addison-Wesley, 1984, 297～299.

[8] M. R. Schroeder, Number Theory in Science and Communication, Springer-Verlag, 1984, 196～198.

[9] Charles Vanden Eynden, Elementary Number Theory, Random House/Birkhäuser, 1987.

一个几何概率问题[①]

Eric Langford

一、介绍

1955 年，Frank Hawthorne 在《美国数学月刊》[1]上提出了如下问题：若在一 $A\times 2A$ 的矩形中随机投放三个点，则该三点恰构成钝角三角形的概率值为多大?

这是一个看似容易实则具有相当难度的问题. 1962 年，C. S. Ogilvy 在其著作《Tomorrow's Math.》[2]中指出，Hawthorne 的问题还没有答案. 事实上，这一问题至今仍未得到解决.

更为一般的提法是：在任意矩形中随机地投放三个点，则此三点恰构成钝角三角形的概率值为多大?

这一提法是几年前我从 Roger Pinkham 教授处获得的，Roger Pinkham 还声称他于 1956 年左右已部分地解决了这一问题(包括 Hawthorne 的问题)，但他的成果一直没有发表.

本文将彻底解决任意矩形中的钝角三角形问题.

二、分析

设随机投放于矩形$[0,1]\times[0,L]$中的三个点构成钝角

① 编译自 Eric Langford 的"A problem in geometrical probability"，*Math. Magazine*，**43**(1970)，237～244.

三角形的概率为 $P(L)$，因这一概率不随刻度的变化而变化，故上述一般问题的解决归结为关于 $P(L)$ 的确定.

记 $R=\{(x,y): 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant L\}$，并设随机变量 X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 相互独立，其中 X_i 均服从[0,1]上的均匀分布，而每一 Y_j 都服从 $[0,L]$ 上的均匀分布. 考虑上述六个变量在 R 上确定的三个随机点：$P_1=(X_1,Y_1)$, $P_2=(X_2,Y_2)$ 和 $P_3=(X_3,Y_3)$，则三角形 $P_1P_2P_3$ 为非退化三角形之概率为 1. 由上可知 $P(L)=P$(角 P_1 为钝角)$+P$(角 P_2 为钝角)$+P$(角 P_3 为钝角)，这是因为任何三角形最多只有一个钝角. 再由对称性知

$$P(L) = 3P(\text{角 } P_1 \text{ 为钝角}).$$

若以 $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ 分别表示从 P_1 到 P_2 及从 P_1 到 P_3 的向量，则

$$\cos P_1 = \frac{(\overrightarrow{P_1P_2}) \cdot (\overrightarrow{P_1P_3})}{|\overrightarrow{P_1P_2}||\overrightarrow{P_1P_3}|},$$

于是知角 P_1 为钝角的充分必要条件为 $\cos P_1<0$，或

$$(\overrightarrow{P_1P_2}) \cdot (\overrightarrow{P_1P_3}) = (X_2 - X_1)(X_3 - X_1) + (Y_2 - Y_1)(Y_3 - Y_1) < 0,$$

令

$$X = (X_2 - X_1)(X_3 - X_1),$$
$$Y = (Y_2 - Y_1)(Y_3 - Y_1),$$

则有

$$P(L) = 3P(X + Y < 0).$$

设 $F(x)$ 为 X 的累积分布函数(Cumulative Distribution Function，简记CDF)，则由简单的尺度变换易知 Y 的 CDF 可

表示为 $G(y)=F(y/L^2)$，由此可以确定 $F(x)$. 当 $F(x)$确定后，利用 X 与 Y 的独立性可表 $P(L)$为如下的 Riemann-Stieltjes 积分之形式：

$$P(L) = 3\int_{-\infty}^{+\infty} F(-x/L^2)\mathrm{d}F(x) \tag{1}$$

（注意：对任何 L，上式的积分值均有限）.

三、关于 $F(x)$的计算

我们首先计算条件 CDF $F_1(x,a)=P(X\leqslant x \text{ 当 } X_1=a)$，即 $F_1(x,a)=P((X_2-a)(X_3-a)\leqslant x)$，$a\in[0,1]$；然后由关系式

$$F(x) = \int_0^1 F_1(x,a)\mathrm{d}a$$

得到 $F(x)$.

先设 $x>0$. 考虑 X_2OX_3 平面上的单位正方形区域 $B=\{(X_2,X_3)：0\leqslant X_2\leqslant 1,0\leqslant X_3\leqslant 1\}$，对于任一固定的 $x>0$，易知方程$(X_2-a)(X_3-a)=x$ 的图形是分别以 $X_2=a$，$X_3=a$ 为渐近线的双曲线（见图 1）. 图 1 中的阴影部分即$\{(X_2,X_3)：(X_2-a)(X_3-a)\leqslant x\}$；因 X_2 与 X_3 的联合分布为 B 上的均匀分布，故知 $F_1(x,a)$为图 1 中阴影部分的面积.

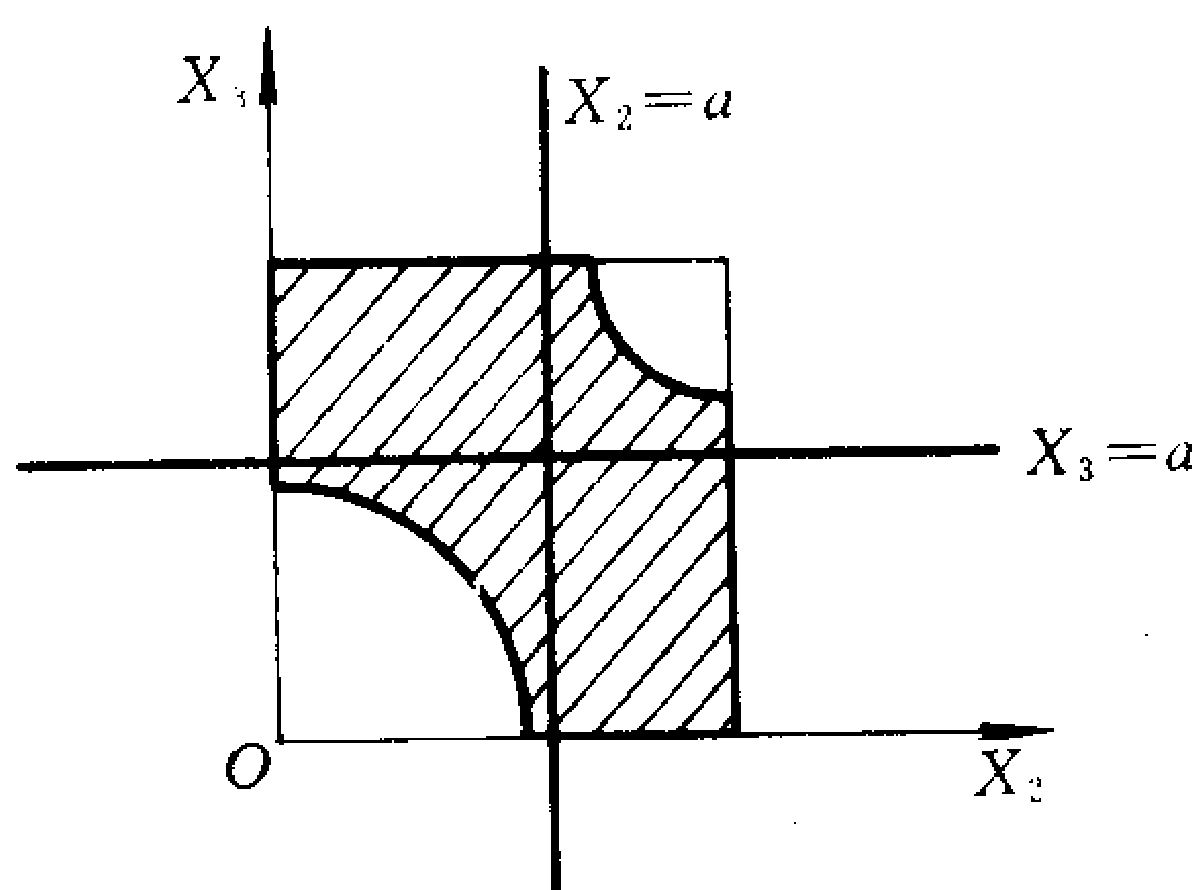


图 1　当 $x>0$ 时阴影部分为 $\{(X_2,X_3)：(X_2-a)(X_3-a)\leqslant x\}$

图 1 中有两个空白区域，即 B 中左下角的区域 A_1 和右上角的区域 A_2. 但一般情形并非总是如此，A_1 和 A_2 中至多只有一个出现，它们依赖于 x 和 a 的数量关系. 双曲线的下支与两个坐标轴均在 $a-(x/a)$ 处相交，故知仅当 $a-(x/a)\geqslant 0$ 即当 $a^2\geqslant x$ 时 A_1 出现. 类似地，当 $(1-a)^2\geqslant x$ 时 A_2 才出现.

当 A_1 出现时，以 $A_1(x,a)$ 表示 A_1 之面积，否则令 $A_1(x,a)=0$，于是当 $a^2\geqslant x$ 时，成立

$$A_1(x,a)=\int_0^{a-x/a}\left(a+\frac{x}{X_3-a}\right)\mathrm{d}X_3$$
$$=x\log x-2x\log a+a^2-x. \qquad (2)$$

类似地定义 $A_2(x,a)$，则当 $(1-a)^2\geqslant x$ 时有

$$A_2(x,a)=\int_{a+x/(1-a)}^{1}\left(1-a-\frac{x}{X_3-a}\right)\mathrm{d}X_3$$
$$=x\log x-2x\log(1-a)+(1-a)^2-x. \quad (3)$$

在此记号下，我们有

$$F_1(x,a)=1-A_1(x,a)-A_2(x,a),$$

从而对任意 $x>0$，有

$$F(x)=1-\int_0^1 A_1(x,a)\mathrm{d}a-\int_0^1 A_2(x,a)\mathrm{d}a.$$

当 $x\geqslant 1$ 时显然有 $F(x)=1$；对于 $0<x<1$，因为当 $a\leqslant\sqrt{x}$ 时 $A_1(x,a)=0$，当 $(1-a)\leqslant\sqrt{x}$ 时 $A_2(x,a)=0$，故

$$F(x)=1-\int_{\sqrt{x}}^1 A_1(x,a)\mathrm{d}a-\int_0^{1-\sqrt{x}} A_2(x,a)\mathrm{d}a.$$

将(2)，(3)代入上式，则当 $x>0$ 时可表

$$F(x)=\begin{cases}-2x(\log x+1)+\dfrac{1}{3}(1+8x^{\frac{3}{2}}), & \text{当 } 0<x<1;\\ 1, & \text{当 } x\geqslant 1.\end{cases}$$

因 $x\to 0^+$ 时 $F(x)\to 1/3$，依连续性知 $F(0)=1/3$. 有趣的

是，结论 $F(0)=1/3$ 也可由排列组合方法得到：随机变量 X_1,X_2,X_3 的排列数为 $3!=6$，因 X_1,X_2,X_3 相互独立同分布，故 6 种排列的机会相同. 但事件 $(X_2-X_1)(X_3-X_1)\leqslant 0$ 仅包含如下两种排列：$X_2\leqslant X_1\leqslant X_3$ 和 $X_3\leqslant X_1\leqslant X_2$. 从而 $F(0)=2/6=1/3$.

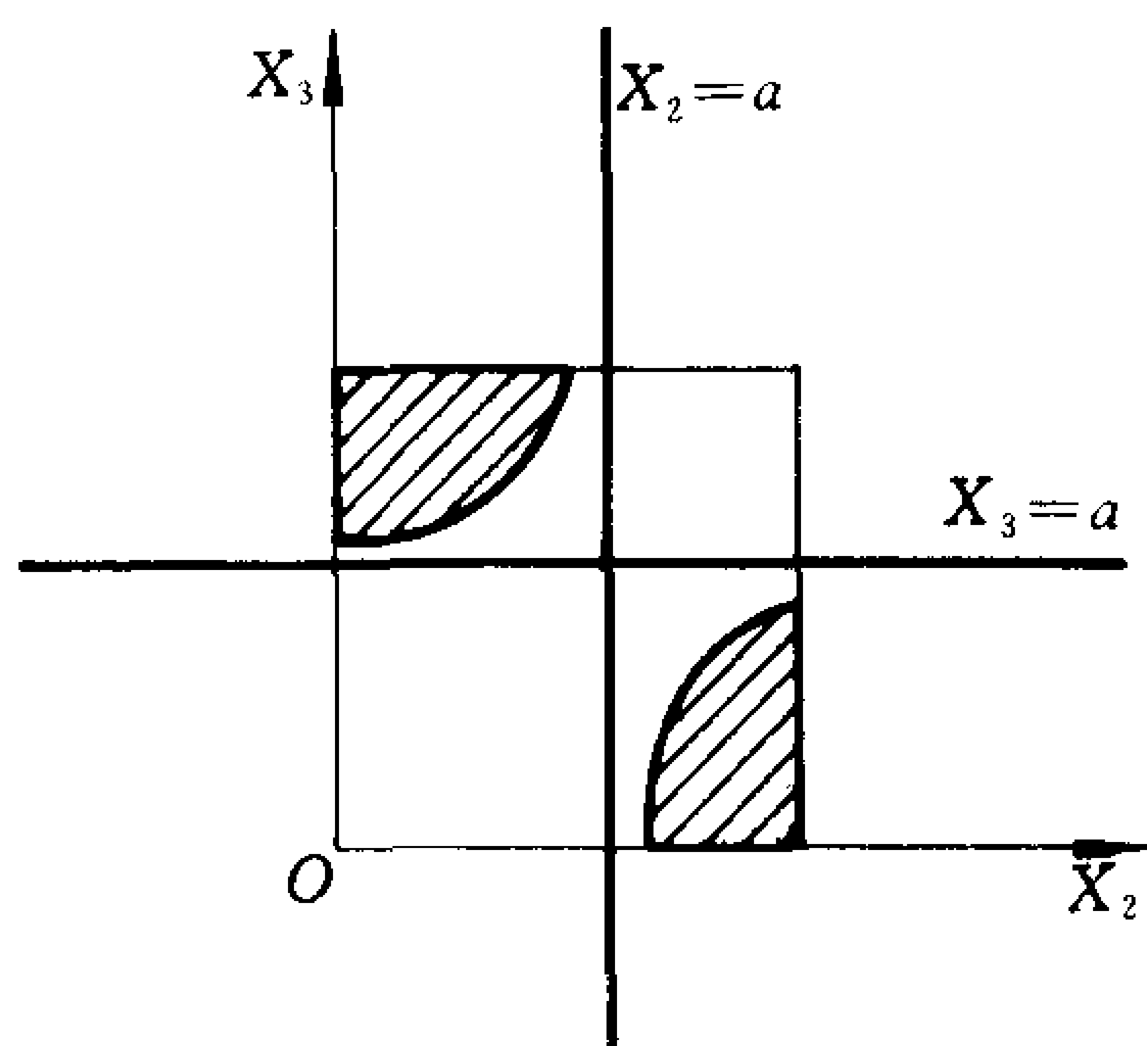


图 2　当 $x<0$ 时阴影部分为 $\{(X_2,X_3):\ (X_2-a)(X_3-a)\leqslant x\}$

下面讨论 $x<0$ 的情形. 仍然考虑正方形区域 B. 当 $x<0$ 时 $F_1(x,a)$ 为图 2 中阴影部分的面积之和. 由对称性知图 2 中的两个阴影部分之面积相等. 类似于 $x>0$ 之情形，阴影部分可能不出现，它们依赖于 x 和 a 的数量关系. 所不同的是，当 $x<0$ 时，上述两个阴影部分只能同时出现或同时不出现.

先看左上角的阴影区域. 双曲线的上支与正方形区域的顶部(即与直线 $X_3=a$)的交点为 $(X_2,X_3)=(a+x/(1-a),a)$，在 X_3 轴上的截距为 $X_3=a-x/a$. 因此，当 $a-x/a>1$ 或 $a+x/(1-a)<0$ 时该区域(右下角的阴影区域)消失. 换言之，当 $x<a(a-1)$ 时阴影部分不出现. 故当 $x<a(a-1)$ 时，$F_1(x,a)=0$，而当 $x\geqslant a(a-1)$ 时

$$
\begin{aligned}
F_1(x,a) &= 2\int_{a-x/a}^{1}\left(a+\frac{x}{X_3-a}\right)\mathrm{d}X_3 \\
&= 2(-x\log(-x)+x\log(a(1-a)) \\
&\qquad +a(1-a)+x).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

考虑到 $0\leqslant a\leqslant 1$，且 $a(a-1)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 $-1/4$，故当 $x<-1/4$ 时不等式 $x<a(a-1)$ 恒成立，从而 $F_1(x,a)=0$ 及 $F(x)=0$. 设 $x\geqslant -1/4$，此时不等式 $x\geqslant a(a-1)$ 与下列不等式等价：

$$(1-\sqrt{1+4x})/2\leqslant a\leqslant(1+\sqrt{1+4x})/2.$$

故当 $-1/4\leqslant x<0$ 时

$$F(x)=\int_0^1 F_1(x,a)\mathrm{d}a=\int_{\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4x})}^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4x})}F_1(x,a)\mathrm{d}a.$$

将(4)代入上式知当 $-1/4\leqslant x<0$ 时

$$F(x)=2x\log\left|\frac{1+\sqrt{1+4x}}{1-\sqrt{1+4x}}\right|+\frac{1}{3}(1-8x)\sqrt{1+4x}.$$

(注意到 $x\to 0^-$ 时也有 $F(x)\to 1/3$.)综合以上结果得到 $F(x)$ 的表达式为

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\leqslant -1/4;\\ 2x\log\left|\dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{1-\sqrt{1+4x}}\right|+\dfrac{1}{3}(1-8x)\sqrt{1+4x}, & \\ \qquad \text{当 } -1/4\leqslant x<0; & \\ 1/3, & \text{当 } x=0;\\ -2x(\log x+1)+(1+8x^{\frac{3}{2}})/3, & \text{当 } 0<x\leqslant 1;\\ 1, & \text{当 } x\geqslant 1.\end{cases}$$

图 3 给出了 $F(x)$ 的图像，其中 $F(x)$ 在点 $x=0$ 处有竖直切线.

四、关于 $P(L)$ 的计算

显然有 $P(L)=P(1/L)$，故不失一般性可设 $L\geqslant 1$. 如前所述，我们有下列 Riemann-Stieltjes 积分表示：

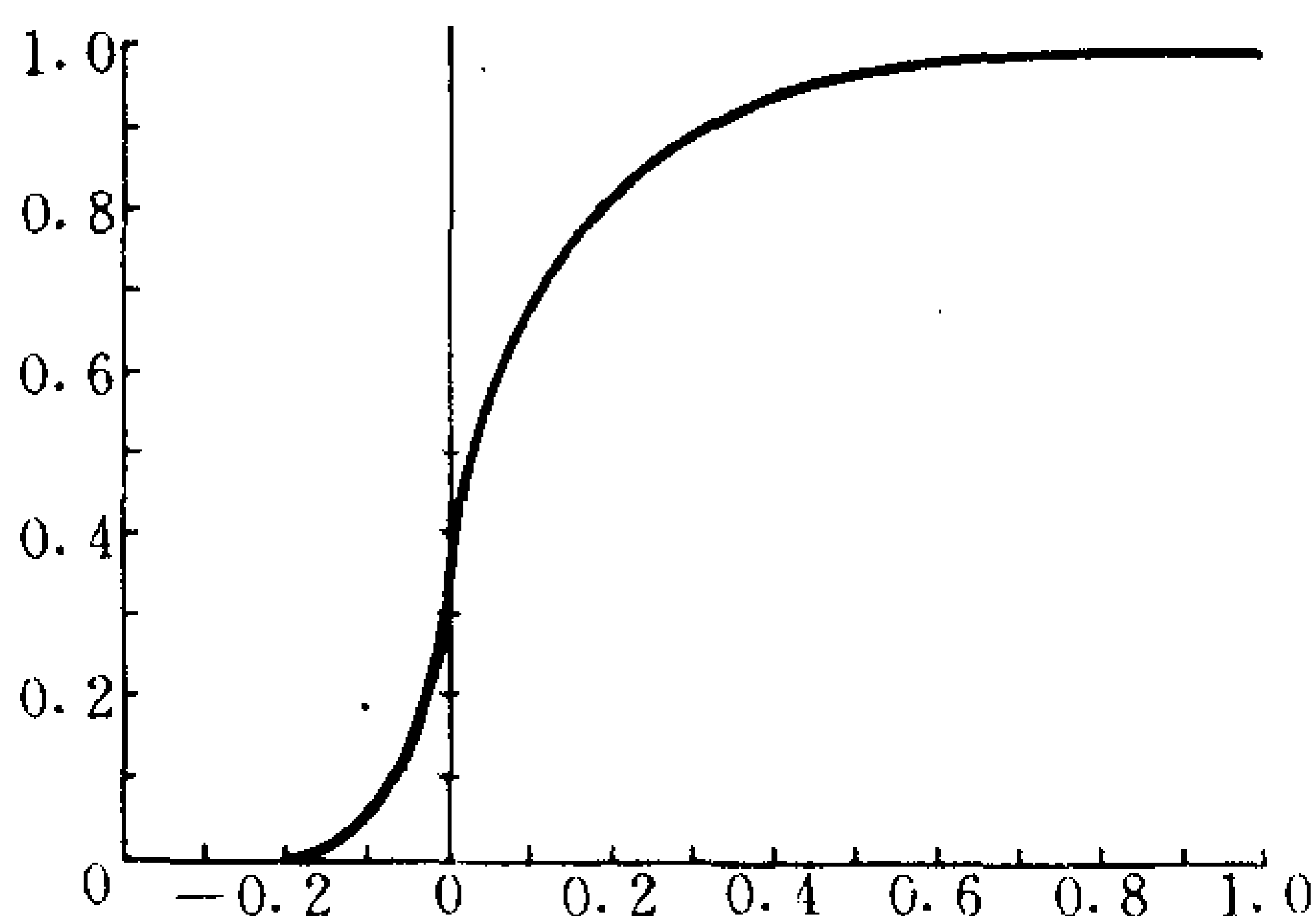


图 3　关于 $X=(X_2-X_1)(X_3-X_1)$ 的累积分布函数 $F(x)$ 的图像

$$P(L)=3\int_{-\infty}^{+\infty}F(-x/L^2)\mathrm{d}F(x).$$

虽然 $F(x)$ 在 $x=0$ 处有竖直切线，但其导函数在整个实数轴上连续，故上式可化为如下的 Riemann 积分表达式

$$P(L)=3\int_{-\infty}^{+\infty}F(-x/L^2)F'(x)\mathrm{d}x, \tag{5}$$

上述积分是存在的，虽然被积函数在 $x=0$ 处无界.

注意到当 $x<-1/4$ 时 $F'(x)=0$，故上式积分下限为 $-1/4$. 又因在 $L\geqslant 2$ 时若 $x>1$ 则 $F'(x)=0$，在 $1\leqslant L\leqslant 2$ 时若 $x>L^2/4$ 则 $F(-x/L^2)=0$，故上式之积分上限为 $\alpha=\min(1,L^2/4)$. 从而有

$$\begin{aligned}P(L)&=3\int_{-1/4}^{\alpha}F(-x/L^2)F'(x)\mathrm{d}x\\&=3\int_{-1/4}^{0}F(-x/L^2)F'(x)\mathrm{d}x\\&\quad+3\int_{0}^{\alpha}F(-x/L^2)F'(x)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{6}$$

对上式右边第一项作变换 $y=-x$，分部积分得

$$\int_{-1/4}^{0} F(-x/L^2)F'(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{1/4} F(y/L^2)F'(-y)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{9} + M^2\int_{0}^{1/4} F(-y)F'(M^2y)\mathrm{d}y,$$

其中 $M=1/L$. 在第二项中作变换 $y=x/L^2$, 则

$$\int_{0}^{\alpha} F(-x/L^2)F'(x)\mathrm{d}x = L^2\int_{0}^{\beta} F(-y)F'(L^2y)\mathrm{d}y.$$

其中 $\beta=\alpha/L^2=\min(1/L^2,1/4)$. 这样,(6)式的计算就转化为求下列形式的积分

$$I(x;A) = \int_{0}^{x} F(-y)F'(A^2y)\mathrm{d}y,$$

其中 $A>0, x=\min(1/4,1/A^2)$. 在此记号下,可表示为

$$P(L) = \frac{1}{3} + (3/L^2)I(1/4;1/L) + 3L^2I(\beta;L),$$

其中 $\beta=\min(1/L^2,1/4)$.

关于积分 $I(x;A)$ 的计算并不难,但很冗长,在此省略具体的计算过程. 不过在 $x=1/4$ 的特殊情形下,我们有

$$I(1/4,A) = \frac{\pi A}{240} + \frac{47}{900} - \frac{\log A}{15}. \tag{7}$$

当 $1\leqslant L\leqslant 2$ 时, $\beta=1/4$, 故有

$$P(L) = 1/3 + (3/L^2)I(1/4;1/L) + 3L^2I(1/4;L).$$

将(7)式代入上式,则当 $1\leqslant L\leqslant 2$ 时有

$$P(L) = \frac{1}{3} + \frac{47}{300}(L^2 + 1/L^2) + \frac{\pi}{80}(L^3 + 1/L^3) - \frac{\log L}{5}(L^2 - 1/L^2). \tag{8}$$

有两种情形值得注意. 当 $L=1$, 此时 B 为一正方形, 我们有

$$P(1) = \frac{97}{150} + \frac{\pi}{40} = 0.72520648\cdots;$$

当 $L=2$，下式给出了 Hawthorne 问题的答案：

$$P(2)=\frac{1199}{1200}+\frac{13\pi}{128}-\frac{3}{4}\log 2=0.79837429\cdots.$$

当 $L\geqslant 2$ 时，$\beta=1/L^2$，故

$$P(L)=1/3+(3/L^2)I(1/4;1/L)+3L^2I(1/L^2;L).$$

将 $I(x;A)$ 之一般形式代入到上式中，得到当 $L\geqslant 2$ 时 $P(L)$ 的表示式为

$$\begin{aligned}P(L)=&\frac{1}{3}+\frac{1}{L^2}\left(\frac{\pi}{80L}+\frac{47}{300}+\frac{\log L}{5}\right)+\frac{47L^2}{300}-\frac{L^2\log L}{5}\\&+\frac{L^3}{40}\arcsin\left(\frac{2}{L}\right)+\left(\frac{L^3}{10}-\frac{3}{5L^2}\right)\log\left(\frac{L+\sqrt{L^2-4}}{L-\sqrt{L^2-4}}\right)\\&+\frac{L\sqrt{L^2-4}}{150}\left(-31+\frac{63}{L^2}+\frac{64}{L^2}\right).\end{aligned}\tag{9}$$

显然，最后三项只有当 $L\geqslant 2$ 时才有意义，并且当 $L=2$ 时最后两项均为零，而 $\arcsin(2/L)=\pi/2$. 因此若在(9)式右边最后三项中以 $\max(L,2)$ 代替 L，则(9)式对 $1\leqslant L\leqslant 2$ 的情况仍然成立.

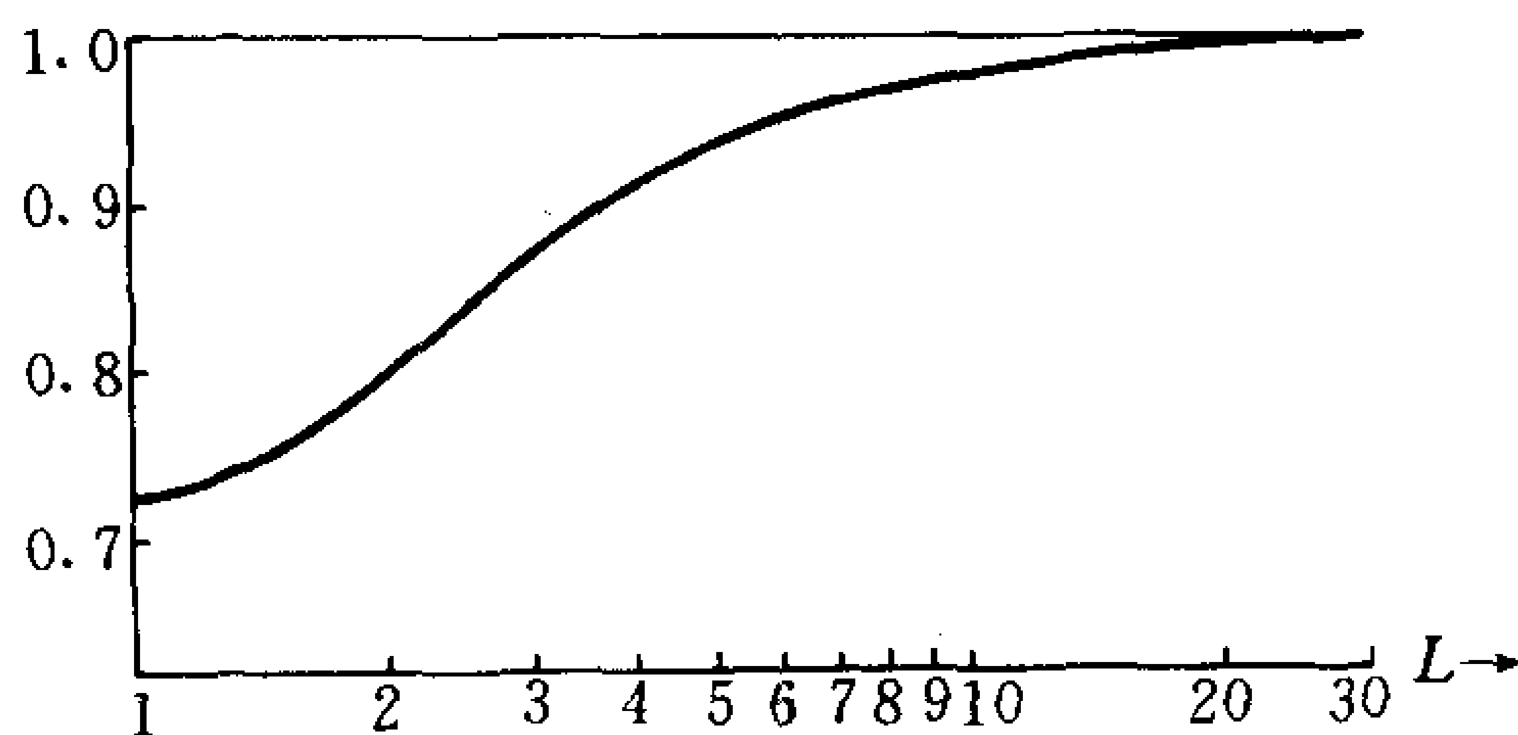


图 4　$P(L)$关于 L 的曲线

图 4 在对数刻度下给出了 $P(L)$关于 L 的曲线.

本文的摘要见[3]，题目是"随机三角形为钝角三角形的

概率".

（范永亮译，朱学贤校）

参 考 文 献

[1] Frank Hawthorne, Problem E1150, *Amer. Math. Monthly*, **62**(1955), 40.

[2] C. S. Ogilvy, Tomorrow's Math., Oxford Univ. Press, New York, 1962, p. 114.

[3] Eric Langford, The probability that a random triangle is obtuse, *Biometrika*, **56**(1969), 689～690.

$\rho=0$ 时样本相关系数 $|r|$ 的分布的几何推导①

W. A. Chance

一、引言

R. A. Fisher 是最早讨论二元数集几何性质的统计学家之一. 他指出，若把 x，y 看成 n 维球面上的两点，则 x 与 y 的相关系数就是它们所引半径之夹角的余弦. 但在推导相关系数 r 的一般形式的分布时，Fisher 的方法仍然有赖于二元正态分布的分析表达式（见[2]）.

后来的一些学者，如 Jackson[6] 及 Hotelling[4,5]，虽然也采用了几何方法，但在大多数情况下，他们的结果也是用分析的方法给出的. 为什么要选择分析方法呢？Hotelling[5]的陈述也许道出了其中因由. 他认为"……Fisher 在推导 r 的分布时所用的技巧是为了吸引那些不相信几何论证的学者."

当然，也有些学者不用分析方法而直接由几何论证给出了统计结果. Durbin 和 Kendall 利用线性空间的性质给出了估计理论中的类似结果. 他们认为："从最终分析看来，高于三维的空间中的几何证明只是用一种特殊的语言来重述分析结果. 但这种方法仍然是很有用的，部分原因是，几何论证简捷明了，至少在某些问题上比之分析推导更易于理解和确

① A Geometric Derivation of the Distribution of the Correlation Coefficient $|r|$ when $\rho=0$, *Amer. Math. Monthly*, **93**(1986), 94～98.

认”[1].

本文中我们在二元总体的相关系数 $\rho=0$ 之假设下，由几何论证直接给出了计算样本相关系数之分布的方法. 设由样本值为分量的向量具有球对称分布，我们证明了所求之概率分布就是包含上述向量观测值的空间中的两个体积之比值.

二、相关性的几何学

设 X,Y 为两个列向量，其分量为各原始观测值与其均值之差. 即

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)',\quad Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$$

其中 $x_i=\hat{x}_i-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{x}_k,\ y_j=\hat{y}_j-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{y}_k,\ i,j=1,2,\cdots,n$，而 $\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_n,\hat{y}_1,\cdots,\hat{y}_n$ 为原始观测值. 于是，Pearson 相关系数可表示为

$$r=Y'X/(Y'Y)^{1/2}(X'X)^{1/2},$$

式中 $Y'X$ 等均为向量之标准内积. 由此式可知，r 也是两向量夹角的余弦值. 若以 u 表示两向量之夹角，则 $r=\cos u$.

设有 n_0 个 X 及 Y 的观测值，则包含这些向量的空间之最大维数为 n_0-1.

为证此结论，以 $\mathscr{X}$ 表示由 Y 及 X 所构成的 $n_0\times 2$ 阶矩阵，$\mathscr{X}=(Y,X)$. 先考虑 $n_0=2$ 之情形. 此时 $\mathscr{X}$ 由两个行向量构成，且任一行向量等于另一行向量乘以 -1. 这是因为每个列向量的分量之和为零. 由此知道，两个行向量中最多只有一个是线性独立的. 这说明两个向量可以包含在一维空间中. 显然，此时 X 和 Y 位于同一直线上，故 $|r|=1$.

当 $n_0=3$ 时，$\mathscr{X}$ 的各行向量之和必为零向量. 因此，三个行向量中至多只有两个是线性独立的. 故 X 及 Y 可以包含在

维数不超过 2 的空间中. 一般地, $n_0\times1$ 阶向量 Y 及 X 可以包含在维数不超过 n_0-1 的空间中.

两向量之夹角与它们的长度无关, 因此, 我们把向量单位化, 使其长度为 1.

$n_0=2$ 的情况是简单的. 我们考虑 $n_0=3$ 的情形. 设 X 和 Y 包含于一个二维空间中, 不失一般性可设向量 Y 与 Y_2 轴重合. 如图 1 所示. 图 1 中的圆就是 X 的端点相对于 Y 的轨迹. Y 与 X 之夹角为 $u=\arccos r$.

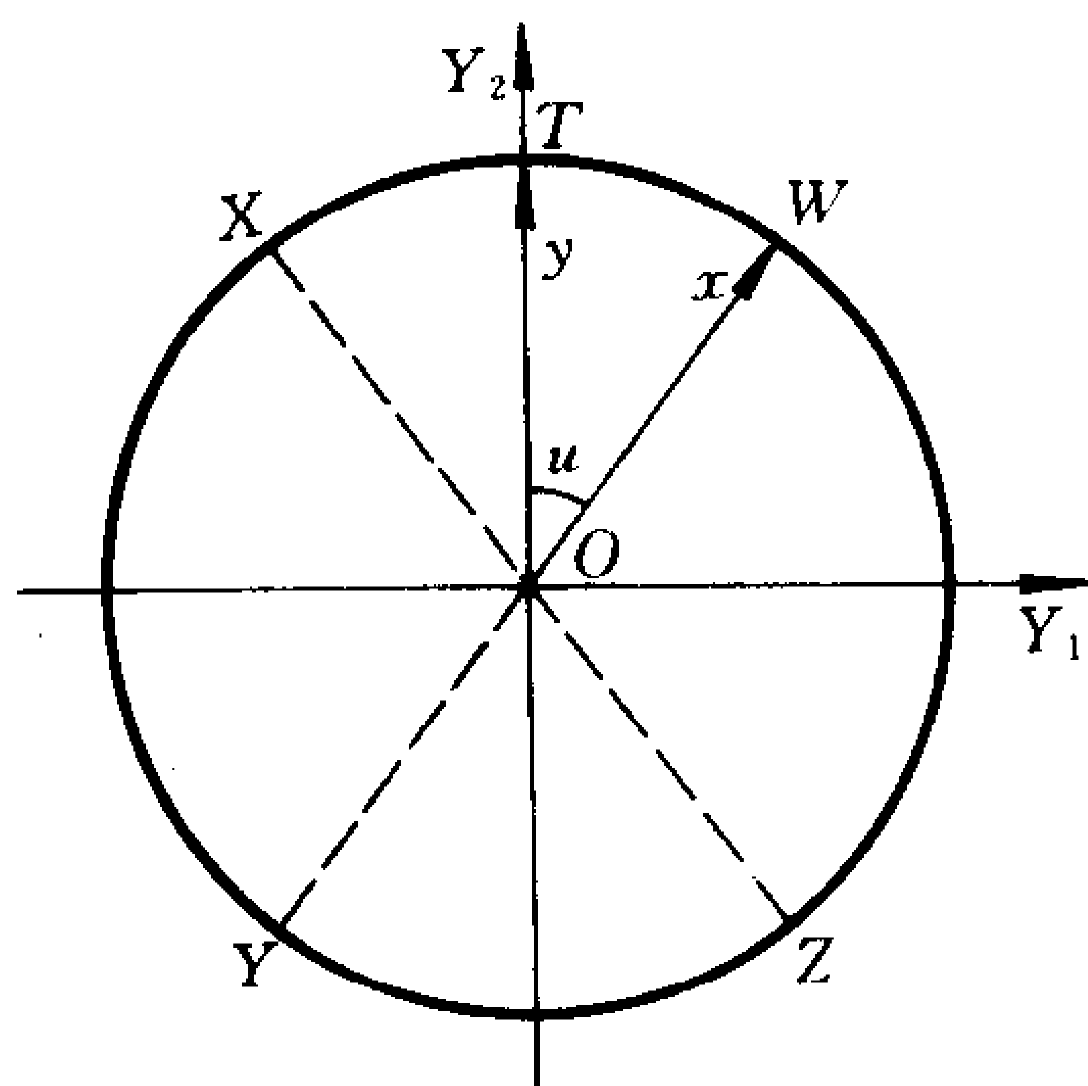


图 1

设 X,Y 是从不相关变量 x,y, 即 $\rho=0$ 的二元总体中随机抽取的样本值所构成的, 并设 X,Y 在二维空间中所处的方向是等概的, 从而 X,Y 具有球对称分布. 以 r_c 表示由样本值所得 r 值, 则

$$P=P(|r|\geqslant r_c).$$

等于扇形区域 OWX 及 OYZ 的面积和与整个圆的面积之比, 也等于区域 OWT 的面积与四分之一圆的面积之比.

注意到 X,Y 的长度为 1, 则圆在第一象限部分的面积为

$$A_1 = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 a\mathrm{d}a\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}$$ ①

以 u_c 表示对应于 r_c 的向量 X,Y 所成的夹角，则角度为 u_c 的扇形区域 OWT 的面积为

$$A_2 = \int_0^{u_c}\int_0^1 a\mathrm{d}a\mathrm{d}u = \frac{u_c}{2}.$$

于是，所求概率为

$$P = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2}{\pi}u_c = \frac{2\arccos r_c}{\pi} \tag{1}$$

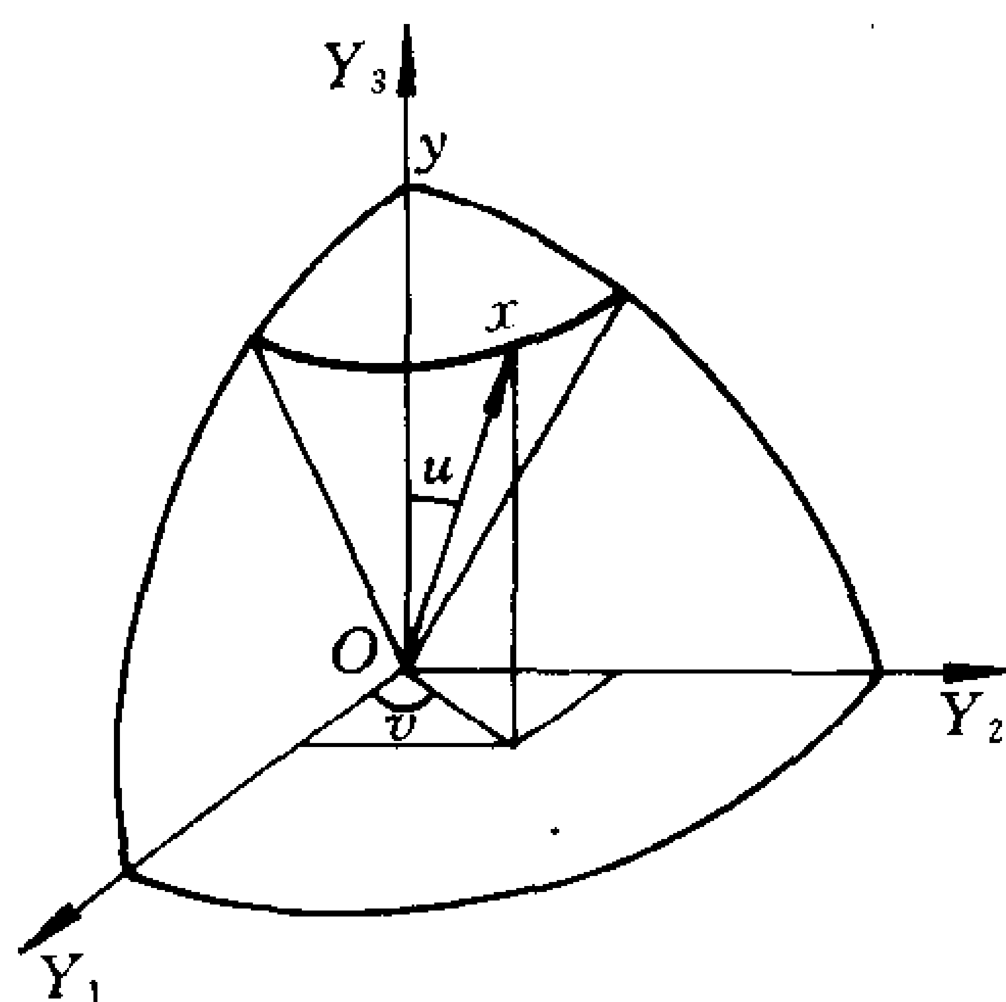


图 2

对 $n_0=4$ 的情形，X,Y 被包含在一个维数至多为三的空间中. 设 Y 固定于一坐标轴上，则 X 的端点相对于 Y 的轨迹为一以 1 为半径的球面，见图 2. 同理，所求概率为 $P=V_2/V_1$，其中 V_1 为该球在第一卦限部分的体积，而 V_2 是与 Y 成固定夹角 u 的向量 X 绕 Y 轴旋转所成的锥体在第一卦限部分的体积.

---

① 为了避免与相关系数 r 混淆，以 a 表示平面极坐标.

图 2 中,球体位于第一卦限部分的体积为

$$V_1 = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 a^2 \sin u \mathrm{d}a\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{\pi}{6}.$$

而锥体位于第一卦限部分的体积为

$$V_2 = \int_0^{\pi/2}\int_0^{u_c}\int_0^1 a^2 \sin u \mathrm{d}a\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{\pi}{6}(1-\cos u_c).$$

因此

$$P = V_2/V_1 = \frac{\pi}{6}(1-\cos u_c)/(\pi/6) = 1-\cos u_c.$$

即

$$P = 1 - r_c. \tag{2}$$

将上述结果一般化,设有 n_0 个 X,Y 的观测值,包含于 n_0-1维空间中. 当 $n=n_0-3$ 时,所求体积为

$$V_1 = \int_0^{\pi/2}\cdots\int_0^1 a^{n+1}\sin^n u \sin^{n-1} v_1 \cdots \sin v_{n-1} \mathrm{d}a\mathrm{d}u\mathrm{d}v_1\cdots\mathrm{d}v_n,$$

$$V_2 = \int_0^{\pi/2}\cdots\int_0^{u_c}\int_0^1 a^{n+1}\sin^n u \sin^{n-1} v_1 \cdots \sin v_{n-1} \mathrm{d}a\mathrm{d}u\mathrm{d}v_1\cdots\mathrm{d}v_n,$$

故

$$P = V_2/V_1 = \int_0^{u_c}\sin^n u\mathrm{d}u \Big/ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n u\mathrm{d}u. \tag{3}$$

上式依赖于观测值个数之奇偶性. 当 n_0 为偶数时,

$$P = 1 - r_c - r_c(1-r_c^2)\sum_{\substack{S=3\\S\text{为奇数}}}^{n}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(S-2)}{2\cdot4\cdot6\cdots(S-1)} \times (1-r_c^2)^{\frac{S-3}{2}}, \tag{4}$$

其中 $n\geqslant3$ 为奇数. 当 $n=1$ 时,$P=1-r_c$. 当 n_0 为奇数时,

$$P = \frac{2}{\pi}\left\{\arccos r_c - r_c(1 - r_c^2)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.\times\left\{1 + \sum_{\substack{S=2 \\ S\text{为偶数}}}^{n} \frac{2 \cdot 4 \cdots (S-2)}{3 \cdot 5 \cdots (S-1)}(1 - r_c^2)^{\frac{S}{2}-1}\right\}\right\}, \quad (5)$$

其中 $n \geqslant 2$ 为偶数. 当 $n = 0$ 时, $P = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arc}\cos r_c$.

三、结论

我们用几何方法得到了 $\rho = 0$ 时 $|r|$ 的准确分布. 事实上, 它恒等于 Fisher[3]的频率分布:

$$\mathrm{d}f = \frac{\Gamma((n_0 - 1)/2)}{\Gamma((n_0 - 2)/2)\Gamma(1/2)}(1 - r^2)^{\frac{n_0 - 4}{2}}\mathrm{d}r,$$

对此密度函数,(3)式中的 P 为

$$P = \int_{r_c}^{1}(1 - r^2)^{(n_0 - 4)/2}\mathrm{d}r \Big/ \int_0^1 (1 - r^2)^{(n_0 - 4)/2}\mathrm{d}r,$$

将 $r = \cos u, n = n_0 - 3$ 代入, 即得(3)式.

(李　虹译, 范永亮、汪仁官校)

参　考　文　献

[1] J. Durbin and M. G. Kendall, The geometry of estimation, *Biometrika*, **38** (1951), 150~158.

[2] R. A. Fisher, Frequency distribution of the values of the correlation coefficient in samples from an indefinitely large population, *Biometrika*, **10** (1915), 507~521.

[3] ____, The general sampling distribution of the multiple correlation coefficient, *Proc. Roy. Soc.* London, **121**(1928), 654~673.

[4] Harold Hotelling, Tubes and spheres in n-space, and a class of statistical

problems, *Amer. J. Math.*, **61**(1939), 440~460.

[5] ____, New light on the correlation coefficient and its transforms, J. Roy. *Statist. Soc.*, **15**(1953), 193~232.

[6] Dunham Jackson, Mathematical principles in the theory of small samples, *this Monthly*, **42**(1935), 344~364.

用多米诺牌覆盖残缺的棋盘

David Singmaster

一、简介

图 0 是一个标准的 8×8 国际象棋棋盘，黑白两色方格相间排列. 多米诺牌是一种恰好覆盖两个方格的 1×2 长方形牌. 用多米诺牌覆盖残缺的棋盘是这样一个问题：在一个一般的 $m \times n$ 棋盘上，删掉某些方格后，能否用若干块多米诺牌恰好将其覆盖. 当 m,n 有一个为偶数时，黑色方格数目等于白色方格数；当 m,n 皆为奇数时，两种颜色的方格数目不等，我们将占多数的方格的颜色称为多数色，反之称为少数色，将位于极角位置方格的颜色称为角色，多数色与角色是一致的.

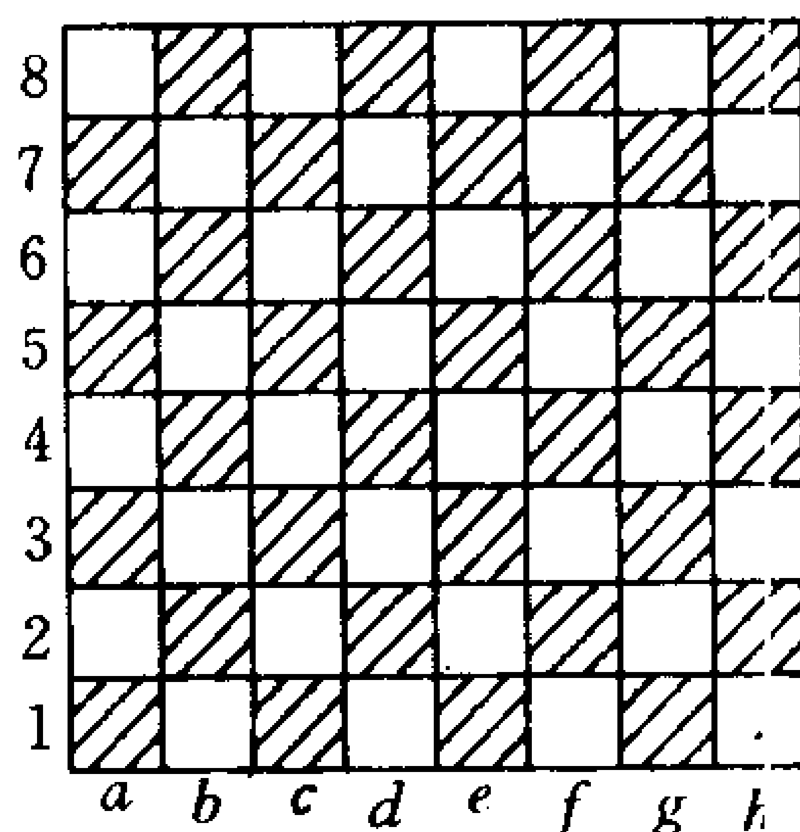


图 0

在 1973 年 1 月出版的《数学杂志》上，R. 吉普斯（R. Gibbs）[1]重申这样一个著名的事实：在一个 $2m \times 2m$ 棋盘上，除掉对角线端点的两个角方格后，不能被多米诺牌覆盖，因为去掉的方格是同一种颜色的. 然后，他提出问题：

（a）在一个 $2m \times 2m$ 棋盘上除掉任意两个不同颜色的方格后，可用多米诺牌覆盖它吗？

（b）在一个 $(2m+1) \times (2m+1)$ 棋盘上除掉任意一个多数色（或角色）的方格后，可用多米诺牌覆盖吗？

容易看出,一个 $m\times n$ 长方形可被多米诺牌覆盖的充分必要条件是 m 或 n 是偶数.这就促使我想到对 $m\times 2n$ 棋盘考虑吉普斯的问题(a),对 $(2m+1)\times(2n+1)$ 棋盘考虑他的问题(b).后面的定理 1 和定理 3 对这些一般化了的问题作出肯定的回答,但(a)中对 $m=1$ 的情况要除外,当 $m=1$ 时,定理 2 给出了覆盖它的充分必要条件.

不难看出,如果我们除掉四个方格,问题(a)就会失败.但是我很高兴地发现,如果除掉任意三个方格,其中两个是多数色方格,一个是少数色的,倘若 $m\neq 0$,$n\neq 0$,问题(b)仍为真.这可在定理 4 中得到证明.将问题(b)推广至五个方格也会失败.

这些结论可进一步有效地推广至 n 维的情形.定理 5 断言:一个 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 的 n 维棋盘,其中某个 m_i 是偶数且 $m_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 均不为 1,删除掉 $2n-2$ 个单元(每种颜色各除掉 $n-1$ 个单元)后,可被 n 维多米诺牌覆盖.当所有的 m_j 为奇数,删除掉 $2n-1$ 个单元,其中 n 个单元是多数色,$n-1$ 个单元是少数色的,定理 6 对此给出了类似的结果.这些结果在下述意义下是最佳的:在上述情况中,删除掉更多的单元能留下一个不可被覆盖的棋盘.定理 5 和定理 6 可取代定理 1,3 和 4,但我还是保留了定理 1,3,4 的独立的证明,因为它们与一般证明很不相同.

在写作本文时,吉普斯问题的两个解法已发表在[2]中.第一个解法只适用于正方形的棋盘.由 C. W. 翠格(C. W. Trigg)提出的第二个解法可适用于我的定理 1 和定理 3 中处理的长方形情况.然而我的解法与已发表的这两个解法大不相同,并且我在证明中引进了某些概念,这些概念在后面是要用到的,因此我保留了我的解法.

二、二维情况

定理 1 当 $m>1$ 时，一个 $m\times 2n$ 棋盘，当删除掉任意两个相反颜色的方格后，可被多米诺牌所覆盖.

证明 我们将给出四种情况的图解. 在每个图解中，被删除的方格均标上一个叉号，将棋盘的剩余部分分成为若干长方形，每个这样的长方形有一条偶数长的边(称为偶边). 偶边的方向用⟷表示，并且标明其长度.

我们沿着 x 轴用棋盘的偶边方向对棋盘定向，并用 (x,y) 标记方格，其中 $1\leqslant x\leqslant 2n$，$1\leqslant y\leqslant m$. 用 0 和 1 代表两种颜色，方格 (x,y) 的颜色与 $x+y \pmod 2$ 一致. 今后，所有同余式取 $\pmod 2$. 设除掉的方格为 (a,b) 和 (c,d). 我们选择 $a\leqslant c$，必要时可利用反射，我们也能选择 $b\leqslant d$. 因为 (a,b) 和 (c,d) 有不同的颜色，因而 $a+b\not\equiv c+d$. 我们或者有 $a\equiv c$，$b\not\equiv d$，或者有 $a\not\equiv c$，$b\equiv d$.

情况 1 $a\equiv c$，$b\not\equiv d$. 那么 $d-b\pm 1$ 和 $c-a$ 是偶数，图 1 给出一个覆盖.

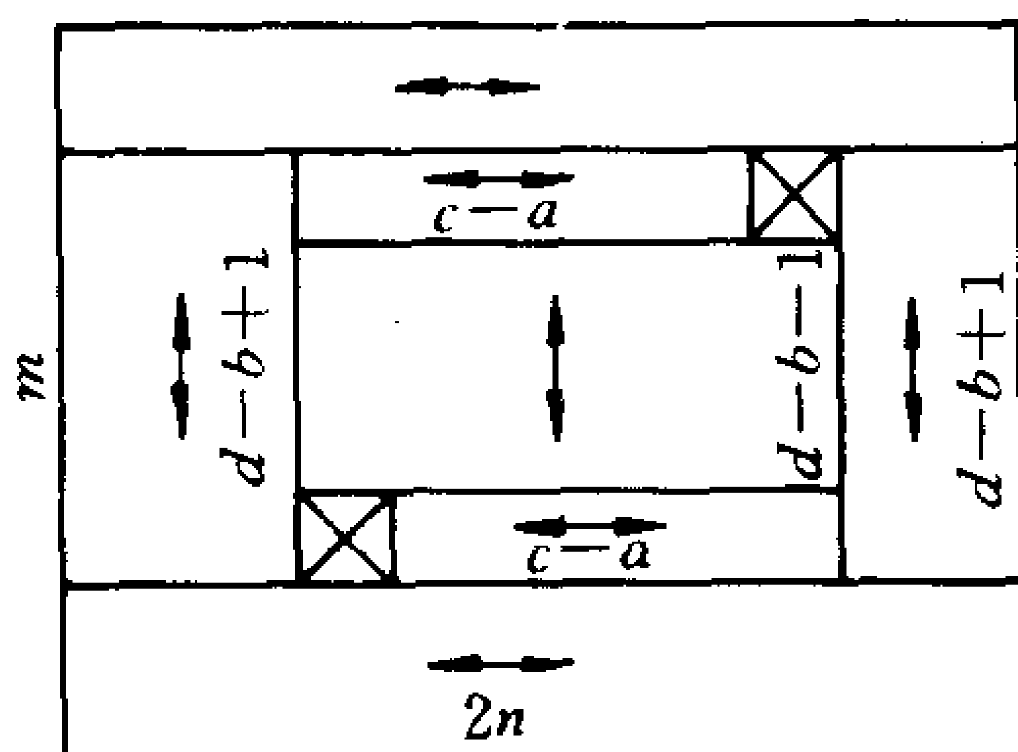


图 1

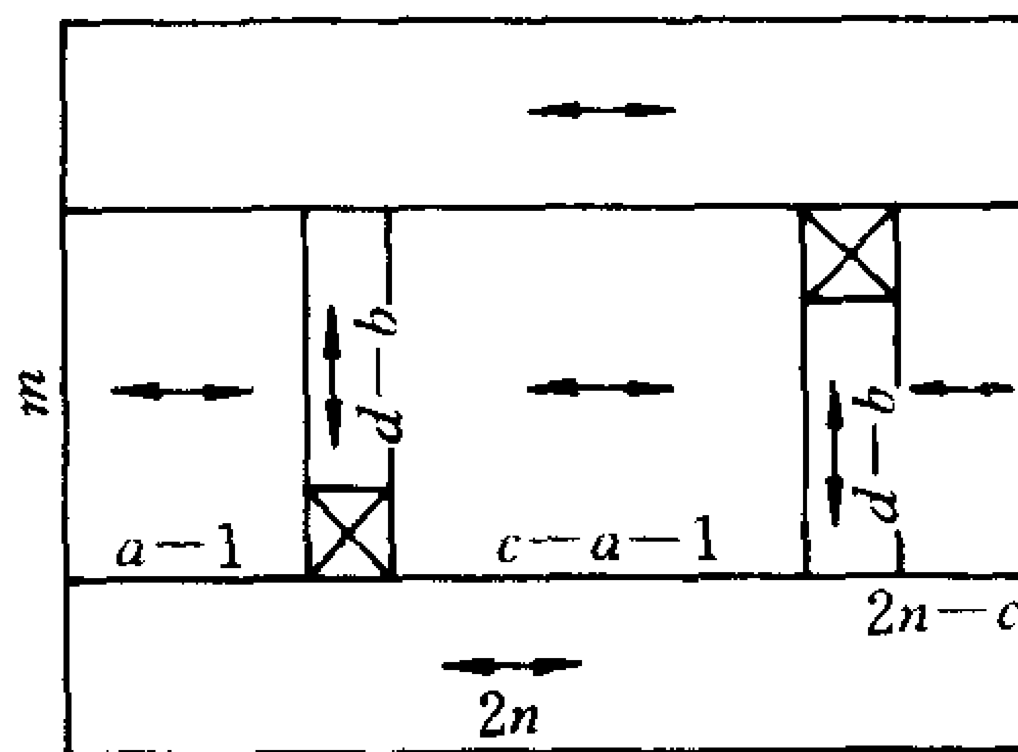


图 2

情况 2-A $a\not\equiv c$，$b\equiv d$，a 为奇数. 那么 $a-1$，$c-a-1$，

$2n-c$和 $d-b$ 是偶数，这样图 2 给出一个覆盖.

情况 2-B-1　$a\not\equiv c, b\equiv d, a$ 为偶数，$b\neq d$. 那么 $a\neq 1$，$c\neq 2n, a-2, i=c-a+1, j=c-a-1, k=2n-c-1$ 和 $d-b$ 为偶数，于是图 3 给出一个覆盖.

情况 2-B-2　$a\not\equiv c, b=d, a$ 为偶数. 那么 $a\neq 1, c\neq 2n$ 且 $a-2, i=c-a+1, j=c-a-1$ 和 $k=2n-c-1$ 为偶数，当 $b<m$时，图 4 给出一个覆盖. 如果 $b=m$，反射图 4 亦然得到一个覆盖. 证毕.

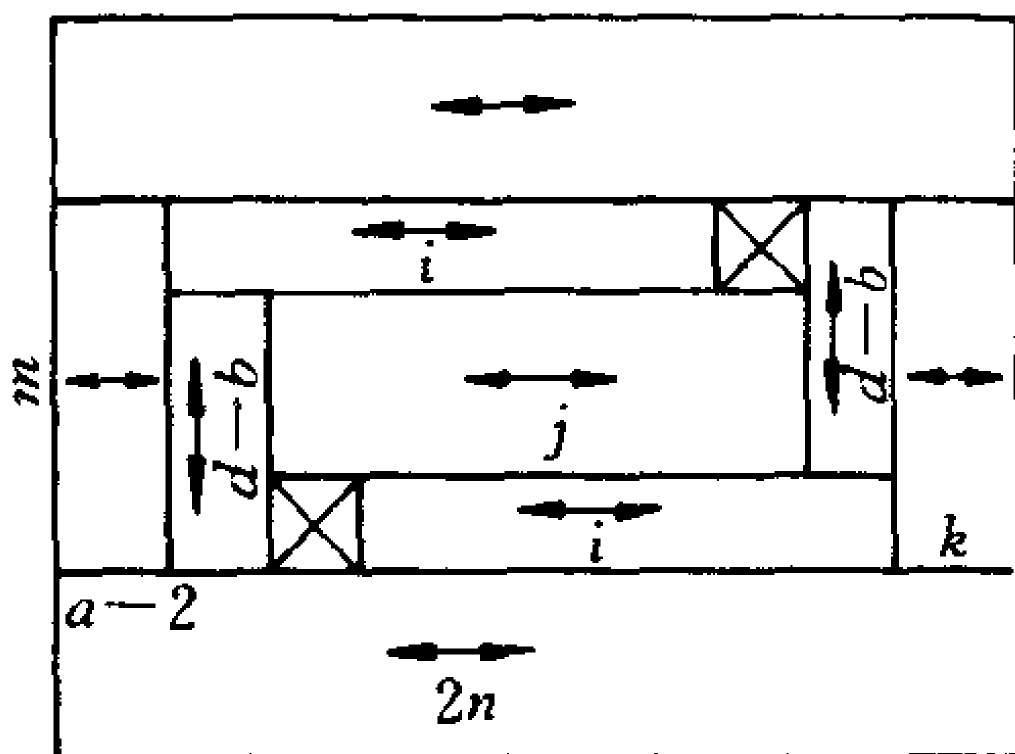


图　3

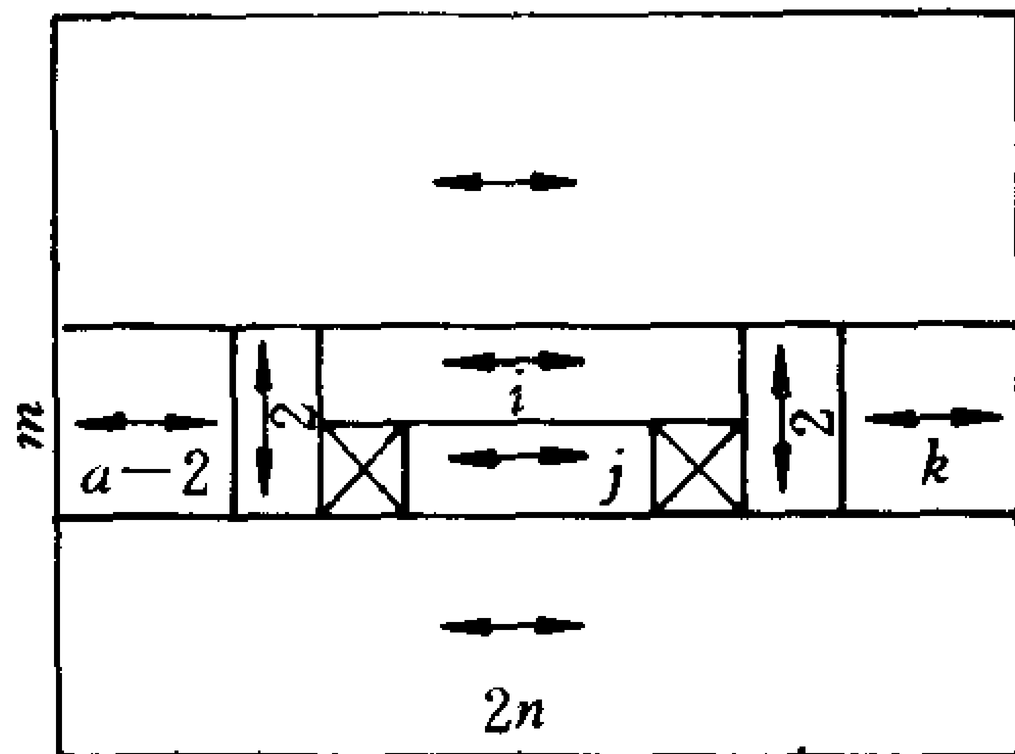


图　4

如果 $m=1$，我们有 $b=d=1$. 情况 2-A 仍正确，但情况 2-B-2失败，人们容易看到，不可能存在一个覆盖. 因而我们有下面的论断：

定理 2　考虑一条有 $2n$ 个方格的带子，这些方格分别标记为 $1,2,\cdots,n$ 且已交替着色. 假定删除了第 a 个和第 c 个方格，$a<c$ 且 $a\not\equiv c$（即这两个方格有不同的颜色）. 那么这条残缺的带子可用多米诺牌覆盖的充要条件是 a 为奇数.

定理 3　对任意的奇整数 r 和 s，在一个 $r\times s$ 棋盘上删除掉任意一个多数色（即角色）的方格后，该棋盘可被多米诺牌所覆盖.

证明　观察图 5. 设被删除的方格为 (a,b)，有 $a+b\equiv 0$.

如果 a 和 b 均为偶数，那么 $r-a+1$ 和 $s-b+1$ 也是偶数. 如果 a 和 b 均为奇数，那么 $a-1,b-1,r-a$ 和 $s-b$ 都是偶数. 不论发生哪一种情况，图中所有四个长方形均有一个偶边. 证毕.

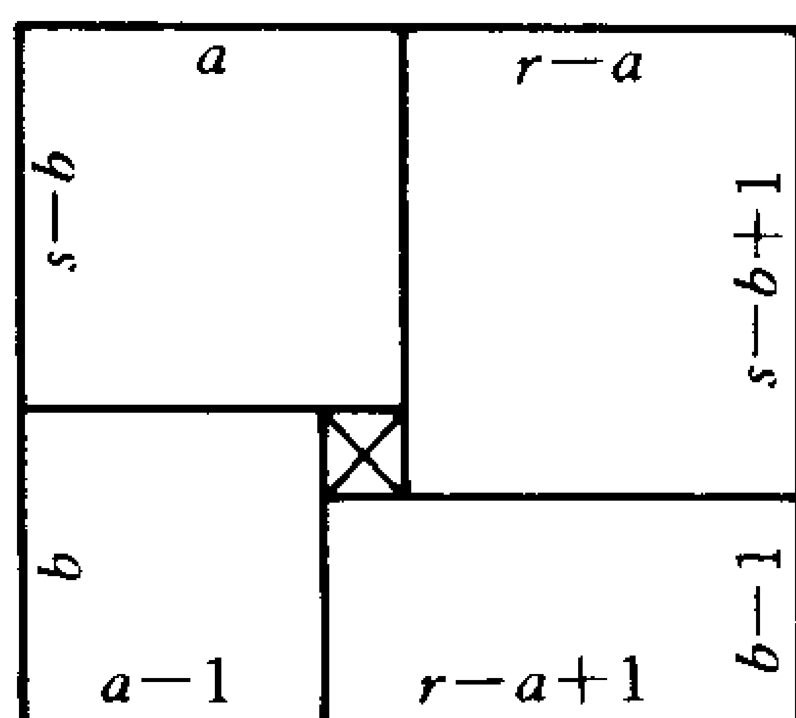


图 5

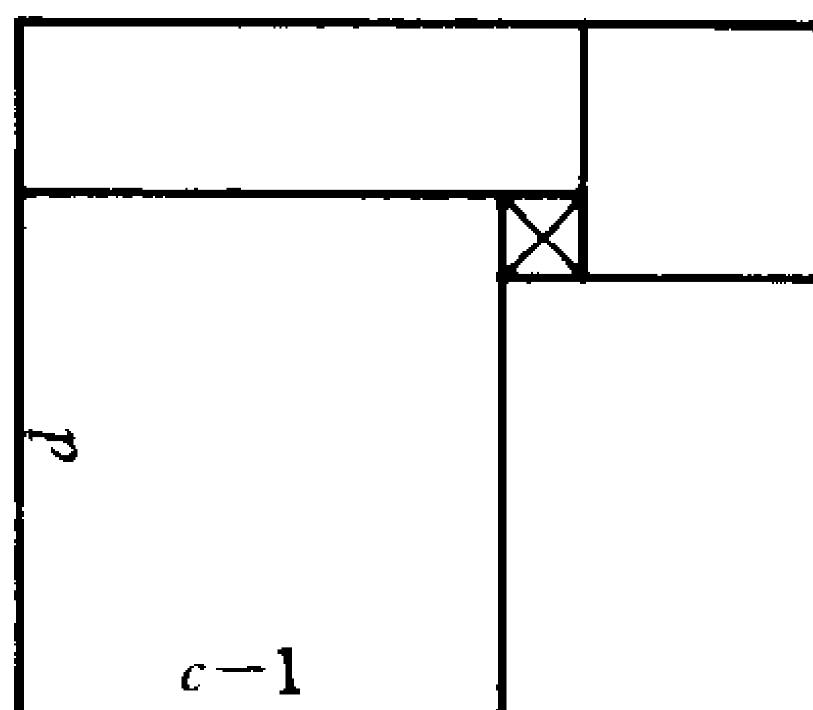


图 6

定理 4 对任意大于 1 的奇整数 r 和 s，在一个 $r\times s$ 棋盘上任意删除三个方格，其中两个是多数色方格，一个是少数色的，则该棋盘可被多米诺牌所覆盖.

证明 设所删除的方格是 (a,b)，(c,d) 和 (e,f). 其中 $a+b\equiv c+d\equiv 0, e+f\not\equiv 0$. 同定理 1，我们可假设 $a\leqslant c, b\leqslant d$.

首先，我们证明可假设 $c=a+1, d=b+1$. 假设 $c\geqslant a+2$. 进而假设 $e\neq a+1$. 将 $r\times s$ 棋盘分割为前 a（或 $a+1$）列和其余的 $r-a$（或 $r-a-1$）列，就产生了两个长方形. 对这两个长方形应用定理 1（或 2）和 3，从而产生一个覆盖. 现在，假设 $e=a+1$. 如果 $f\geqslant b$，那么 (c,d) 和 (e,f) 均位于图 5 的右上长方形中. 我们可应用定理 1（如果 $f=b$，可利用定理 2）对这个长方形产生一个覆盖，而其余的长方形均有一个偶边，于是我们对这个棋盘就有了一个覆盖. 如果 $f<b$，观察图 6，图 6 是对 (c,d) 画成的图 5. (a,b) 和 (e,f) 均在左下长方形中，因此刚刚用过的论证给出了一个覆盖（其实，第二种情况恰是第一

种情况旋转 180°.). 所以我们只需考虑 $a \leqslant c \leqslant a+1$. 对称地，只需考虑 $b \leqslant d \leqslant b+1$. 由于 $a+b \equiv c+d$，得出 $c=a+1$，$d=b+1$.

其次，我们证明可假设 $e \leqslant a, f > b$ 或 $e > a, f \leqslant b$. 假设 $e \leqslant a$. 如果 $f \leqslant b$，那么 (a,b) 和 (e,f) 均在图 6 和图 8 的左下长方形中. 用定理 1 可至少对图 6、图 8 中的一个产生一个如上的覆盖. 现在假设 $e > a$. 如果 $f > b$，那么 (c,d) 和 (e,f) 均在图 5 和图 7 的右上长方形中. 根据刚才用过的论证，我们有一个覆盖.

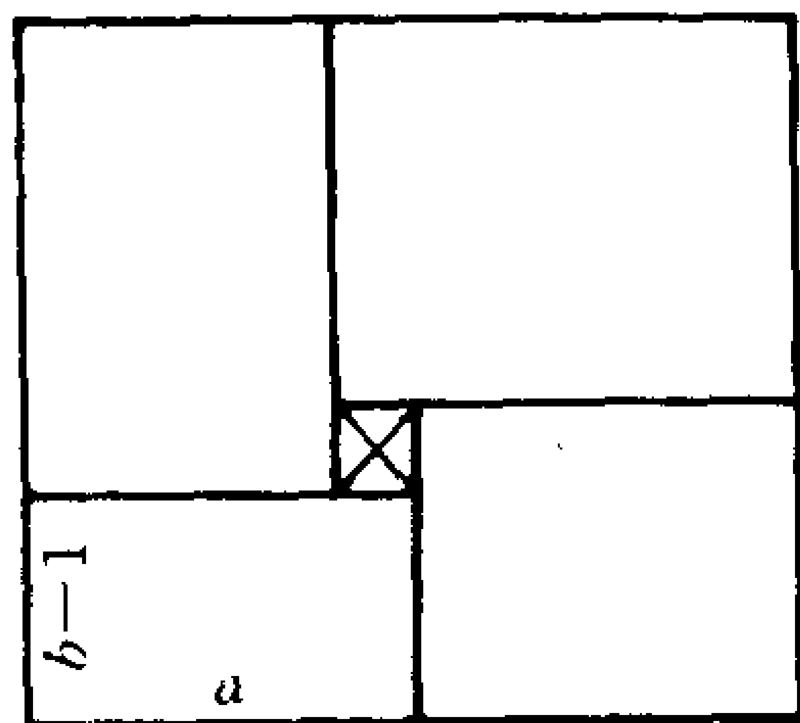


图 7

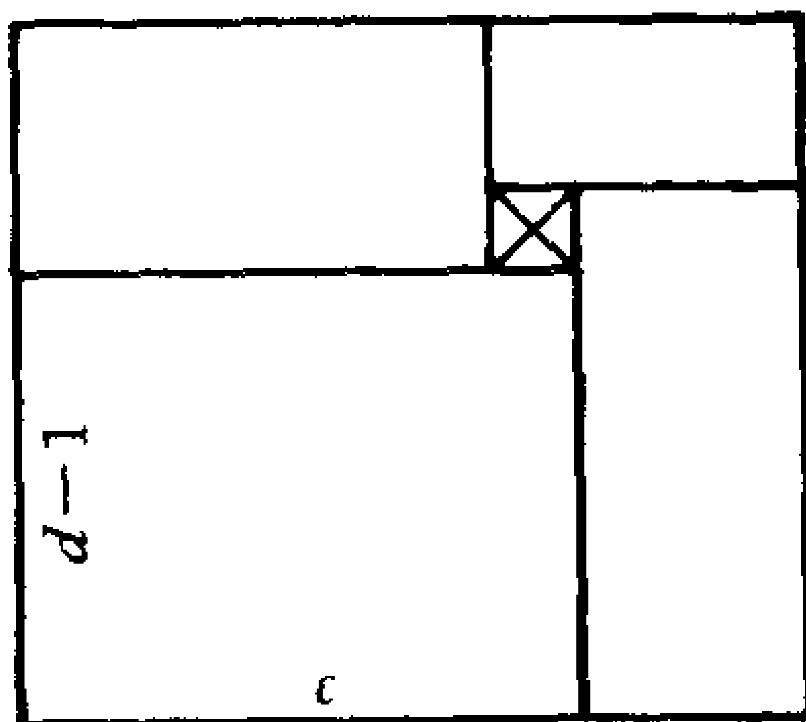


图 8

现在假设 $e \leqslant a, f > b$. 已知 $a+b \equiv 0$. 如果 a 和 b 均为偶数，那么将棋盘分割为前 a 列和其余的 $r-a$ 列，产生两个长方形. 对这两个长方形，应用定理 1 和定理 3 得到一个覆盖. 如果 a 和 b 均为奇数，那么将棋盘分割为前 b 行和其余的 $s-b$ 行，产生两个长方形. 对这两个长方形可使用定理 3 和定理 1. 对 $e > a, f \leqslant b$ 的情况可同样处理. 现在，我们已经证明了对任何一种情况均存在一个覆盖. 证毕.

如果 r 或 s 是 1，那么定理 4 失败. 我们可写出对这种情况存在覆盖的充要条件，但并没有多大意义. 将定理 1 删除四个方格，以及将定理 4 推广到删除 5 个方格均遭失败，因为在

这两种情况，人们可孤立出一个单独的角方格.

三、n 维情况

首先我们介绍某些术语. 我们说一个 $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 的 n 维棋盘是**恰当的**：如果所有 m_i 均大于 1；是**偶的**：如果某个 m_i 是偶数（即其体积为偶数）；是**奇的**：如果所有 m_i 是奇数. 一个 **n 维多米诺牌**是一个 $1 \times 1 \times \cdots \times 1 \times 2$ 的块. 通常我们将只称它为**一个多米诺牌**. 容易看出，一个棋盘能被多米诺牌所覆盖，当且仅当棋盘是偶的. 我们称棋盘的 n 维单位立方体为单元(cell).

定理 5 在一个恰当的、偶的 n 维棋盘上，删除掉任意的 $2n-2$ 个单元，且每种颜色各删除一半，则这个棋盘可被多米诺牌所覆盖.

证明 我们将单元标记为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $1 \leqslant x_i \leqslant m_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 由颜色 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i$ 给出标准的 0-1 着色. 我们称着了色的单元为 0- 单元和 1- 单元. 注意到不必改变基本情况就可颠倒着色. 现在假设 m_n 可被 2 整除（记为 $2|m_n$）.

本证明是对 n 进行归纳. 对每个 n，我们描述两个覆盖过程，这可使我们将问题化简到所有 m_i 是 2 的情况. 在这种情况，可使用这两个过程来覆盖这个（超）立方体，除非所有被删除掉的 1-单元有 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$，这或者是不可能的或者是平凡的情况. 下面详细叙述之.

当 $n=1$ 时，定理显然为真. 假设 $n>1$，对 $n-1$ 的情况定理成立. 考虑由 $x_1 = 1$ 所确定的 $n-1$ 维单元层或 $n-1$ 维（超）平面. 设在这一层中被删除掉的 0-单元（1-单元）数为 k_0

(k_1). 我们假定 $k_0 \leqslant k_1$,必要的话,可颠倒颜色.

情况 1　$k_1 \leqslant n-2$. 设 $d=k_1-k_0$. 我们希望找到 d 个具有 $x_1=1$ 的未被删除的 0-单元,使得与其相邻的 $x_1=2$ 的 1-单元也未被删除. 设 $A=m_2 \cdot m_3 \cdots m_n$,当 $n>1$ 时,我们有 $A \geqslant 2^{n-1} \geqslant 2(n-1)$. 存在 $A/2-k_0$ 个具有 $x_1=1$ 的未被删除的 0-单元,并且最多存在 $n-1-k_1$ 个具有 $x_1=2$ 的被删除的 1-单元. 因而至少存在 $A/2-k_0-n+1+k_1=A/2-n+1+d \geqslant d$ 个具有 $x_1=1$ 的未被删除的 0-单元有与其相邻的 $x_1=2$ 的 1-单元也未被删除.

将 d 块多米诺牌放在这样的 d 对单元上. 现在,可将 $x_1=1$ 这一层视为删除了 k_1 个 1-单元和 k_1 个 0-单元,其中 $k_1 \leqslant n-2$. 由归纳假设,我们可用多米诺牌覆盖这一层(这里我们使用了对 $m_2 \times m_3 \times \cdots \times m_n$ 的 $(n-1)$ 维问题和 $1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 的 n 维问题的自然的等价性.). 棋盘的剩余部分可视为一个删除了 $n-1-k_0$ 个 0-单元和 $n-1-k_0$ 个 1-单元的棋盘,这样我们把问题化简为一个 $(m_1-1) \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 的棋盘问题. 在这里和其他地方,不必说明的是我们正用了这样一个事实:当删除的单元数少于 $2n-2$ 时,定理的结论仍然正确,只要每种颜色的单元删除数目相同.

情况 2-A　$k_1=n-1, k_0<n-1$. 在 $x_1=1$ 的面上,选择(被删除的)任意 k_0 个 1-单元,并将该面视为已删除了这 k_0 个 1-单元和 k_0 个 0-单元. 因为 $k_0<n-1$,由归纳假设可给出这个面的一个覆盖. 设 $d=k_1-k_0=n-1-k_0$. 现有 d 个已被这种方式覆盖了的,但却是我们希望删除的 1-单元. 考虑覆盖了其中之一的那块多米诺牌,它覆盖了一个相邻的 0-单元. 转动这块多米诺牌使其长边沿 x_1 方向且仍覆盖这个相邻的 0-单元以及覆盖这个 0-单元的一个有 $x_1=2$ 的 1-单元邻

居．这个邻居不可能是一个删除了的1-单元，因为所有删除的1-单元具有$x_1=1$．我们对所有这样的d个被覆盖了的，但希望删除的1-单元都执行这一步．$x_1\geqslant 2$的棋盘剩余部分可视为一个删除了$n-1-k_0$个0-单元和$n-1-k_0$个1-单元的棋盘．因而我们再次将问题化简为一个$(m_1-1)\times m_2\times\cdots\times m_n$棋盘的问题．

情况2-B　$k_1=n-1,k_0=n-1$．那么所有被删除的单元均在第一层．我们可以很容易地覆盖$x_1=m_1,x_1=m_1-1,\cdots,x_1=3$的那些层．于是将问题化简到一个$2\times m_2\times\cdots\times m_n$棋盘的问题．

重复使用这些化简，终于可将问题归结到一个$2\times m_2\times\cdots\times m_n$棋盘，然后对每个其他维也使用此法，最终可将问题简化为一个$2\times 2\times\cdots\times 2$棋盘（即$n$维立方体）．

关于这个n维立方体，再次考虑$x_1=1$的那层，设$k_0(k_1)$为在该层中删除的0-单元（1-单元）数目，并且假设$k_0\leqslant k_1$．我们可假设$k_1\neq 0$，必要时，可用反射这个立方体实现．

情况3-A　$k_1\leqslant n-2,k_0=0$．在$x_1=2$的面上有$j_0=n-1$个删除了的0-单元和$j_1=n-1-k_1$个删除了的1-单元．我们可以利用情况2-A的论证来证明此种情况，只要在证明过程中始终将0-单元与1-单元交换，将$x_1=1$的面与$x_1=2$的面交换．从而对$x_1=2$的面给出了一个覆盖，而余下的$x_1=1$的面上有k_1个0-单元和k_1个1-单元被删除了．由归纳法假设，我们可以覆盖这一层．

情况3-B　$k_1\leqslant n-2,k_0>0$．直接应用情况1的论证可以给出$x_1=1$这一层的一个覆盖．余下的$x_1=2$这一层上有$n-1-k_0$个0-单元和$n-1-k_0$个1-单元被删除了．由归纳法假设，可以覆盖这一层．

于是，除了$k_1=n-1$，即所有删掉的1-单元都有$x_1=1$这种情况之外，我们能够覆盖这个残缺的n维立方体. 对每个其余的维，均可利用这个论证，因而除非所有删掉的1-单元均有$x_1=1=x_2=\cdots=x_n$，我们可有一个覆盖. 但在n维立方体中只有一个这样的单元，而我们删掉了$n-1$个1-单元. 当$n>2$时，这是不可能的. 当$n=2$时，这个2×2问题是简单的. 证毕.

定理6 在一个恰当的、奇的n维棋盘上，删除掉任意$2n-1$个单元，其中n个单元为多数色的，$n-1$个单元为少数色的，则该棋盘可用多米诺牌覆盖.

证明 假定棋盘已着色，角单元的着色为0，于是我们删除了n个0-单元和$n-1$个1-单元. 证明的模式与定理5相似. 我们描述一个覆盖过程，该过程可将问题化简到一个$3\times3\times\cdots\times3$的情况，然后再解决这一情况.

当$n=1$(和$n=2$)时，定理显然为真. 假定$n>1$，且$n-1$时定理成立. 考虑由$x_1=1$或$x_1=2$给出的两层. 设在这两层中删掉的0-单元(1-单元)数目为$k_0(k_1)$.

情况1 $k_0\leqslant n-1$. 此时，对$k_0\leqslant k_1$和$k_1\leqslant k_0$的证明是对称的，因而我们只考虑$k_0\leqslant k_1$的情况. 设$d=k_1-k_0$，根据定理5中情况1的证明，我们能够找到d个具有$x_1=2$的未被删除的0-单元，使得与其相邻的$x_1=3$的1-单元也未被删除. 在这d对单元上放置d块多米诺牌，于是可将头两层视为一个$2\times m_2\times\cdots\times m_n$棋盘，在它上面删除了$k_1$个1-单元和$k_1$个0-单元. 因为$k_1\leqslant n-1$，由定理5我们能够覆盖这两层. 对于$x_1\geqslant3$的棋盘的剩余部分，可将其看作删除了$n-k_0$个0-单元和$n-1-k_0$个1-单元的棋盘. 这样我们把问题化简为一个$(m_1-2)\times m_2\times\cdots\times m_n$的棋盘.

情况 2　$k_0=n$. 现在所有删掉的 0-单元均在头两层. 当 $m_1>3$ 时,后两层(即 $x_1=m_1$ 或 $x_1=m_1-1$)中没有 0-单元被删除. 可利用在情况 1 中刚刚用过的论证来覆盖这两层,且将问题简化为一个$(m_1-2)\times m_2\times\cdots\times m_n$ 棋盘.

重复使用此化简,可将问题归结为一个 $3\times m_2\times\cdots\times m_n$ 棋盘问题,进而归结为一个 $3\times3\times\cdots\times3$ 棋盘. 对这种情况,我们再考虑 $x_1=1$ 或 $x_1=2$ 的头两层,数字 k_0 和 k_1 如前所述. 利用反射,我们可假定 $k_0>0$.

情况 3-A　$k_0\leqslant n-1, k_1=0$. 那么在 $x_1=2$ 或 $x_1=3$ 的后两层至少有 $j_0=n-k_0$ 个 0-单元和 $j_1=n-1$ 个 1-单元被删除. 因为 $k_0>0$,因而 $j_0\leqslant n-1$,情况 1 的论证给出了后两层的一个覆盖. 剩下的第一层有 k_0 个删除掉的 0-单元和 k_0-1 个删掉的 1-单元,由归纳法假设,我们能够覆盖第一层.

情况 3-B　$k_0\leqslant n-1, k_1>0$. 情况 1 中给出的过程对头两层给出了一个覆盖,剩下的第三层中有 $n-\min(k_0,k_1)$个删除掉的 0-单元和 $n-1-\min(k_0,k_1)$个删掉的 1-单元. 因为 $\min(k_0,k_1)>0$,我们可利用归纳假设来覆盖第三层.

因而,除 $k_0=n$,即所有删除的 0-单元均在头两层这种情况外,我们能够覆盖这个残缺的 $3\times3\times\cdots\times3$ 立方体. 现在考虑当 $x_1=2$ 或 $x_1=3$ 的后两层. 设 j_0 为后两层中删掉的 0-单元数目. 如果 $j_0>0$,可像情况 3 那样处理,而且除 $j_0=n$ 这种情况外,我们总可获得这个残缺棋盘的一个覆盖. 但是,如果 $j_0=n$ 且 $k_0=n$,那么所有删掉的 0-单元必须有 $x_1=2$. 另一方面,如果 $j_0=0$ 且 $k_0=n$,那么所有删掉的 0-单元必有 $x_1=1$. 根据哪种情况发生来定义 $y_1=2$ 或 $y_1=1$. 然后,所有删掉的 0-单元具有 $x_1=y_1$(更详尽的论证,可假设 $y_1=1$.).

现在,对每个其他维应用这个过程,除了所有删掉的 0-

单元有 $x_1=y_1, x_2=y_2, \cdots, x_n=y_n$ 以外，均可获得一个覆盖．但是这种单元最多只有一个，而我们是在 $n>1$ 时删掉 n 个 0-单元，因而最后这种情况是不可能的．证毕．

容易看出，不能将定理 5 和定理 6 推广到删掉更多的单元，因为删除同样颜色的（或少数色的）n 个单元会孤立一个角单元．

四、推广和猜测

这些结果推广到用直的 3-奥米诺牌或直的 k-奥米诺牌（直的 k-奥米诺牌是 k 个单元呈直线形排列成的牌，而多米诺牌是 2 个单元呈直线形排列成的牌）来覆盖残缺棋盘，$k\geqslant 3$，看来很困难，即使只考虑颜色 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i \pmod k$ 的标准 k-着色也很困难．例如，$2\times 2\times \cdots \times 2\times k$ 棋盘只有按一种方式被直的 k-奥米诺牌覆盖，几乎任意 k 个单元的删除——每种颜色均删掉一个单元——都留下一个不可覆盖的棋盘．估计必须假设所有的 $m_i\geqslant k$．

进而，在一个有标准 k-着色的 n 维棋盘上，$k\geqslant 3$，一个角单元的 n 个邻居只有两种颜色，且某些角单元有 $(n+1)/2$ 个某种颜色的邻居和 $n/2$ 个另一种颜色的邻居，因此对每一种颜色最多可删除 $(n-1)/2$ 个单元，对这样的棋盘仍企望有一个覆盖．也许下面与定理 5 类似的结论为真：

猜测 A　设 $k\geqslant 3$，考虑一个 $m_1\times m_2\times \cdots \times m_n$ 棋盘，$k\mid m_n$，所有的 $m_i\geqslant k$．如果在棋盘上删除掉任意 $k(n-1)/2$ 个单元，即每种颜色删掉 $(n-1)/2$ 个单元，那么棋盘的剩余部分可用直的 k-奥米诺牌覆盖．

类似于定理 3，定理 4 和定理 6 的形式，由于每种颜色删

除的单元数目的变化，而变得相当复杂. 对一个标准着色的 $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 棋盘，设 a_i 是颜色 i 的单元数，令 $b = \min\{a_i\}$ 且 $d_i = a_i - b$. 那么，或许下面类似于定理 6 的猜测是正确的：

猜测 B 设 $k \geqslant 3$，考虑一个 $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 棋盘，所有的 $m_i \geqslant k$. 设 d_i 为刚才所定义的. 如果对每种颜色 i，我们删掉颜色 i 的任意 $(n-1)/2 + d_i$ 个单元，那么棋盘的剩余部分可被直的 k-奥米诺牌覆盖.

注意，猜测 A 是猜测 B 的一个特殊情况. 类似于定理 3 的一个猜测是颜色 i 仅删掉 d_i 个单元的猜测 B.

（刁在筠编译，朱本仁校）

参 考 文 献

[1] R. A. Gibbs, Problem 852, *Mathematics Magazine*, **46**(1973), 42.

[2] Michael Gilpin and C. W. Trigg, Solutions of Problem 852, *Mathematics Magazine*, **46**(1973), 287～288.

用矩形铺盖矩形[1]

我们经常遇到这样一类问题：用一些基本几何图形互不重叠地按照种种方式拼排以使其构成某个特殊的几何图形 R，每一种方式的拼排称为是 R 的一个铺盖，这类问题通常称为铺盖问题. 矩形是最基本的几何图形之一，所以很自然地某些最常见类型的铺盖是用小矩形作为铺盖的基本几何图形（它称为铺盖的元素或砖），这称为矩形铺盖. 最常见讨论的 R 也是一个矩形. 本文要研究矩形 R 的某些基本类型的矩形铺盖——即所谓简单铺盖. 在本文末尾还为对此感兴趣的读者列出了一些参考文献，它们讨论各种矩形铺盖问题，包括著名的"完美方(squared square)"问题.

定义 如果没有两个或两个以上的小矩形（元素或砖）所联成的集合构成一个严格在 R 内的矩形[2]，则矩形 R 的矩形铺盖称为是简单的铺盖.

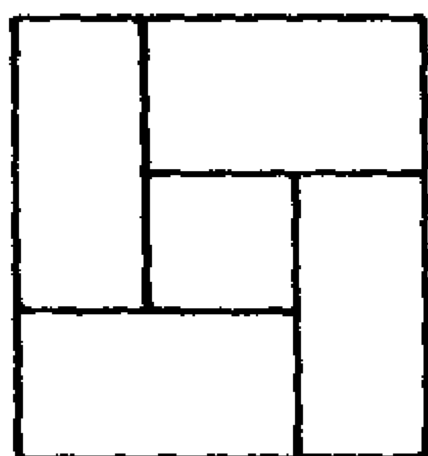


图 1

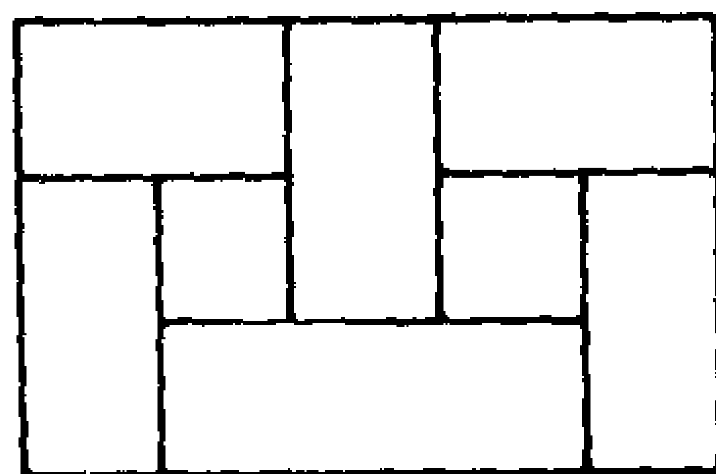


图 2

图 1 和图 2 给出了两个简单铺盖，它们在以后讨论中特

① 编译自 *Math. Magazine*, Vol. **55**, No. **5**, 1982 年 11 月.

② 即比 R 小的矩形.

别有用.

显见，由两个小矩形组成的铺盖一定是简单铺盖. 因此，以后说到简单铺盖总是指小矩形的个数多于两个. 这样，由定义知，在简单铺盖中任意两个小矩形不能构成一个较大的矩形. 这一事实表明：在简单铺盖中，两个相邻元素的公共边不能是完全重合的. 此外，不失一般性，可以假定矩形 R 及每个小矩形（元素）的边长都是整数（为什么?）. 这样，一个 $m\times n$ 的矩形 R 仅当 $m\geqslant 3$ 和 $n\geqslant 3$ 时，才存在简单铺盖，所以图 1 确实给出了存在简单铺盖的最小矩形 R：3×3.

1. 在简单铺盖中可以允许有多少块砖?

试想我们把图 1 做一个简单的变形，即是将其中某些砖的边长加长，使之变成图 3 的铺盖形式. 这种方法就证明了任何一个 $m\times n$ 的矩形都可以由 5 块砖铺满.

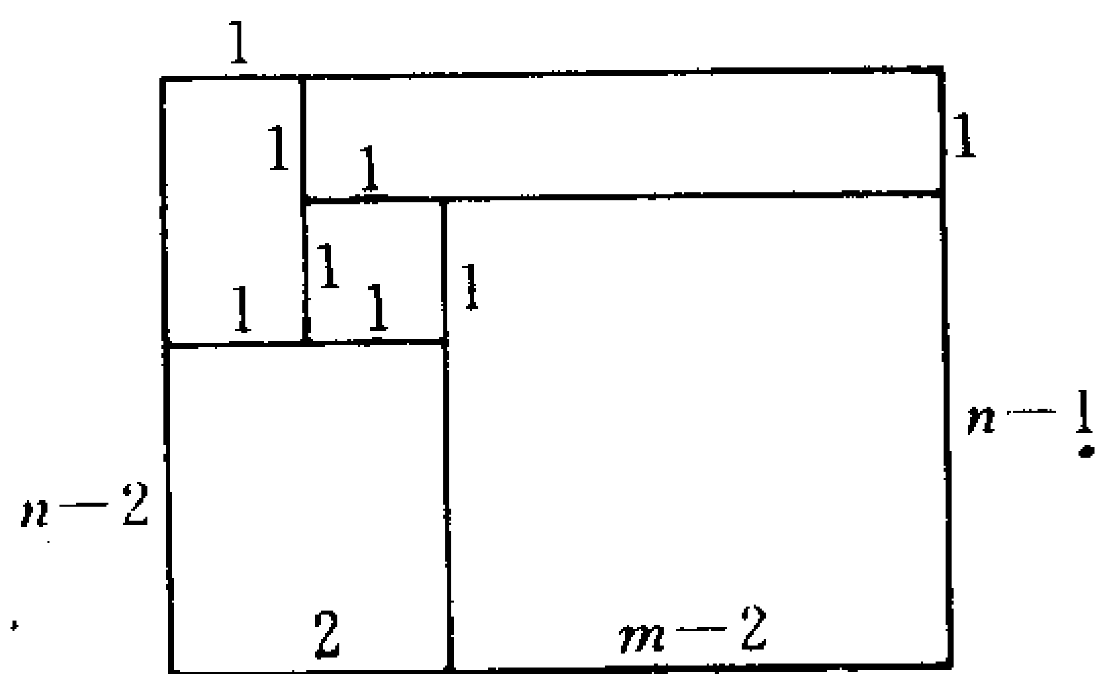


图 3

一个自然而然的问题产生了，它就是：

问题 1 对于什么样的整数 n，必定存在着由 n 块砖组成的铺盖?

对此，读者可以自己尝试着去构造一些简单铺盖，以便增加对简单铺盖的直观理解，那样很快就会发现，不存在砖数 $n\leqslant 4$ 时的简单铺盖（不计 $n=1,2$ 的显然情况）. 图 1 给出了 $n=5$ 时的简单铺盖. 那么 $n=6$ 时呢? 我们指出，没有恰为 6 块砖的简单铺盖（虽然这里我们不做证明）. 然而，对于所有更大的 n 时，总会存在着 n 块砖的简单铺盖，也就是有定理：

定理 1 对于所有的 $n \geqslant 7$，总会存在着 n 块砖的简单铺盖.

证明 在图 4 中我们指出了，由两种形式的“左边块”、四种形式的“右边块”和一种形式的“中间块”，可以获得简单铺盖，一般的构造方式是，取一块“左边块”、m 块（可能为零）“中间块”以及一块“右边块”，将它们拼合在一起，即可获得简单铺盖.

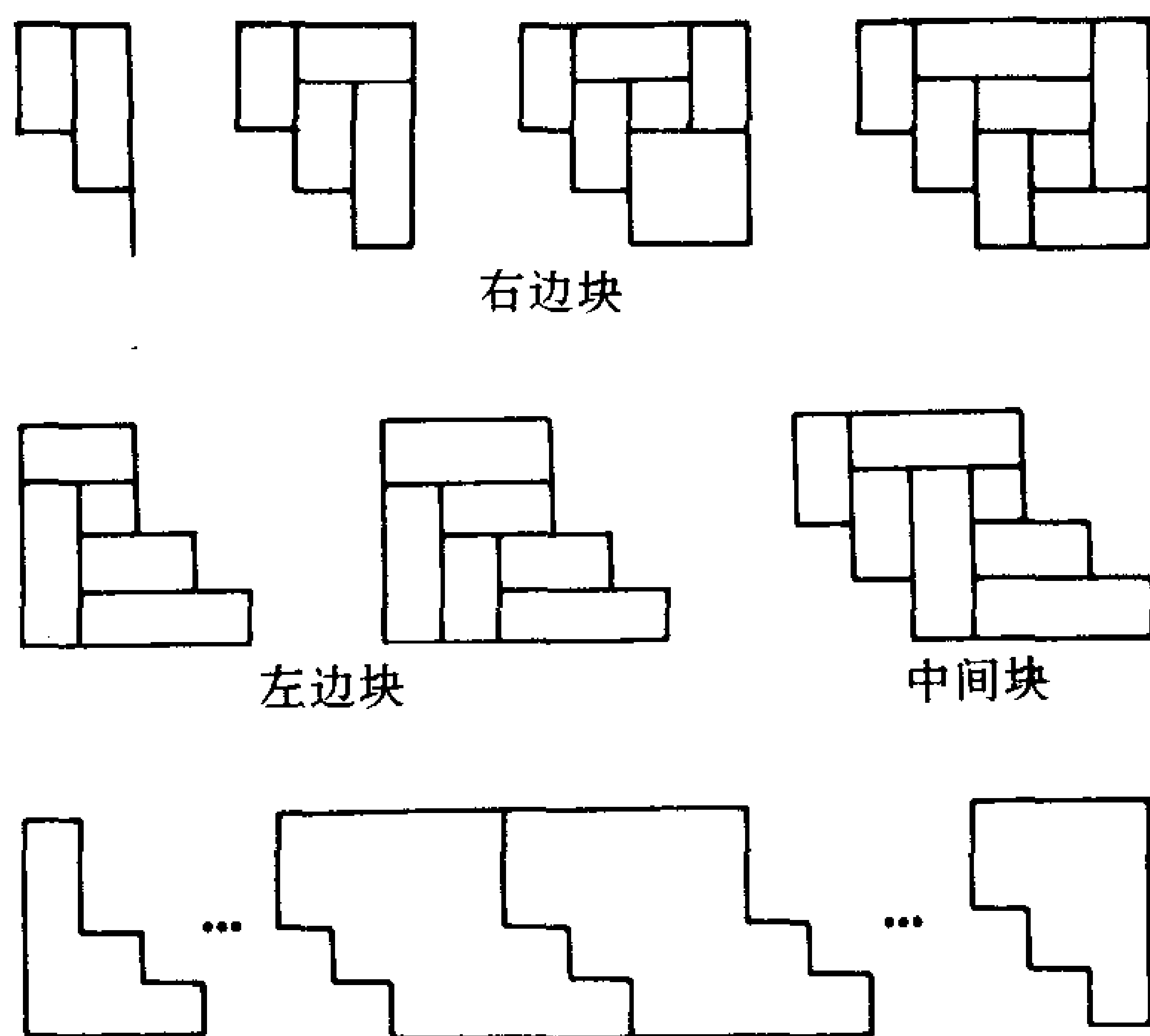


图 4

因为“左边块”含有 5 块或是 6 块砖，“右边块”含有 2，4，6 或 8 块砖，“中间块”含有 7 块砖，所以以上述方式构成的铺盖中的砖数是

$$\begin{Bmatrix}5\\6\end{Bmatrix}+7m+\begin{Bmatrix}2\\4\\6\\8\end{Bmatrix},\quad m\geqslant 0\,.$$

由上式知，这样的数可以是所有大于等于 7 的整数，定理证毕.

我们还要指出，还会存在不同方式的由 7 块砖构成的“中间块”，例如，图 5 给出的就是其中之一. 由于在上述的铺盖方式中，用了 m 个“中间块”，而这些“中间块”又可以以任意顺序选择这两种之一，因此我们就证明了：存在某个常数 $c>0$，使得用 n 块砖构成的简单铺盖，在本质上至少应有 $c\cdot 2^{n/7}$ 种不同的方式. 当然，要想叙述关于使用 n 块砖的不同的简单铺盖的个数，还必须说清楚所谓两种不同的简单铺盖的含义. 例如，我们并不把图 3 所示的（无限多种的）简单铺盖方式看做是不同的. 我们不想继续进一步讨论这个问题，除了指出：在一个颇为自然的等价性的定义之下，可以证明，n 块砖的简单铺盖的不同方式的种数不超过 $(20000)^n$. 这个上界并不精确，它仅仅是用于说明铺盖方式的数目是以形如 c^n 这种简单指数函数为上界，而不是以更迅速增长的函数，例如 $n!$ 或 2^{n^2} 为上界的.

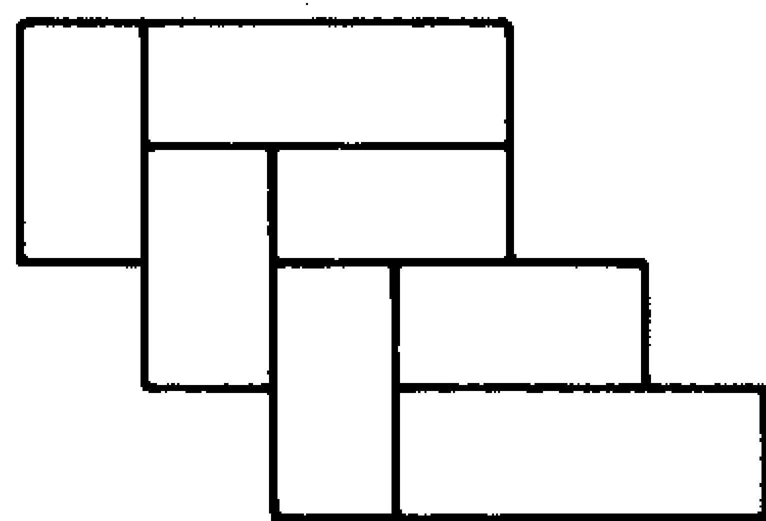


图 5

在此我们提出关于铺盖的另一个问题是，在 $m\times n$ 的矩形的简单铺盖中，砖数所可能的极大值是什么？

这个问题的精确答案放在下一节.

2. 在简单铺盖中砖的平均大小

给定一个矩形 R 的简单铺盖后，我们把这种铺盖方式的砖的平均面积定义为比值：R 的面积$/n$，其中 n 是这种铺盖方式的砖数. 例如，图 1 所示的铺盖方式的平均面积是 9/5，而图 2 所示的铺盖方式的平均面积是 15/8. 当然，当矩形 R 给定之后，在 R 的某种铺盖方式中，若砖的平均面积是极小，那么，该铺盖方式的砖数恰好是在 R 的所有铺盖方式中砖数所可能取到的极大值.

问题 2 找出在矩形的任何简单铺盖方式中砖的平均面积的下界？

读者会发现，我们尝试着发现的几乎所有的简单铺盖方式，其误差至少是砖的平均面积的 2 倍. 粗略地说，这是对的，因为只有面积为 1 的砖有最小的分数. 于是，在图 1 和图 2 的铺盖中是特别"安排得当的".

定理 2 (a) 在矩形 3×3 的简单铺盖中，砖的平均面积是 9/5. 对于所有其他矩形的简单铺盖来说，砖的平均面积严格地大于 11/6. (b) 存在唯一的(不计旋转、平移和反射)平面的简单铺盖，使其砖的平均面积恰为 11/6.

证明 首先我们来考察，在一个矩形 R 的简单铺盖中，一个单位方砖 U 所相邻的砖的形状可以是怎样的. 不难看出，由于 U 与其相邻的砖的边界不能是完全重合的，所以 U 与其相邻的砖的铺法只能是图 6 所示的两种情况之一.

在图 6 中，砖 A,B,C,D 称为砖 U 的邻砖，另外，我们称 B 是 A 的下一块邻砖，C 是 B 的下一块邻砖，依次类推. 我们试图定义在 R 的简单铺盖中的各个单位砖的"影响效应"的某种度量. 因此，我们让 A 代表与单位砖 U 相邻的一块从属



图 6

砖，而 B 是 A 的下一块邻砖. 我们依照下列方式，赋予砖对 A 和 U 以相应的值 $v_U(A)$：

(i) 如果 A 的面积为 2，则有 $v_U(A)=1/2$；

(ii) 如果 A 的面积大于 2 且 B 的面积等于 2，则有 $v_U(A)=7/2$，

(iii) 如果 A 的面积大于 2 且 B 的面积大于 2，则有 $v_U(A)=5/4$.

另外，我们赋予砖 A 以相应的值 $v(A)$，它等于所有 $v_U(A)$的和，这里的 U 取与 A 相邻的所有单位砖. 由于图 1 所给的铺盖方式不能是我们所给出的 R 的简单铺盖的一个子形状，因此任何一个单位砖 U，至少有一块邻砖，使其面积大于 2. 所以，对每块具有邻砖 A,B,C,D 的单位砖 U 来说，必有(为什么)

$$v_U(A)+v_U(B)+v_U(C)+v_U(D)\geqslant 5. \tag{1}$$

在继续证明之前，我们需要下面的引理.

引理

(a) 如果 A 的面积等于 2，则有 $v(A)\leqslant 1$；

(b) 如果 A 的面积等于 3，则有 $v(A)\leqslant 7$，并且只有在 A 的 1×1 邻砖如图 7(a)或 7(b)所示的那样，等式才成立；

(c) 如果 A 的面积等于 4,则有 $v(A)\leqslant 7$;

(d) 如果 A 的面积大于 4,则有 $v(A)\leqslant 14$;

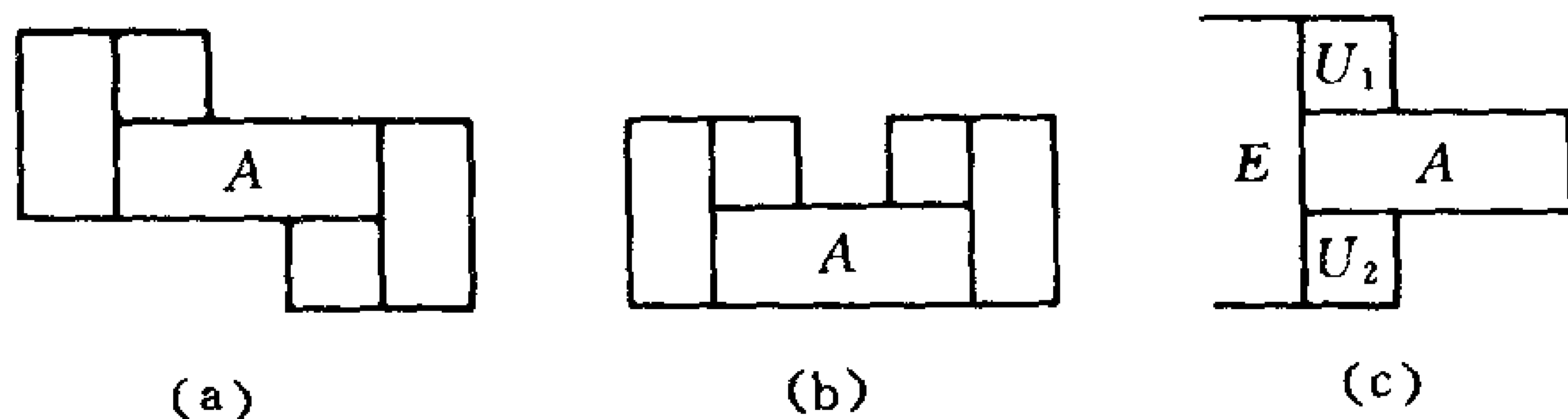


图 7

证明 (a) 我们直接观察到,在 A 的这种情况下,A 至多有两个单位邻砖,因此结论成立.

(b) 在这种情况下,由于 A 是 1×3,那么 A 最多有 4 块 1×1 邻砖,即单位邻砖. 如果 A 只有两块 1×1 邻砖,那么它们必定是如图 7(a),7(b)或 7(c)所示的那样放置. 在图 7(c)中,A 的邻砖 E 的面积至少是 3,于是 $v_{U_1}(A)\leqslant 5/4$ 和 $v_{U_2}(A)\leqslant 5/4$. 这样推知此时 $v(A)\leqslant 5/2$. 在图 7(a)和 7(b)中,容易看出 $v(A)=7$. 类似的论证可以证明,当 A 有 3 块 1×1 邻砖时,那么 $v(A)\leqslant 5/2+7/2=6$,当 A 有 4 块 1×1 邻砖时,那么 $v(A)\leqslant 5$.

(c),(d) 的证明方法几乎与(b)相同. 只要注意到:A 的两块单位邻砖不能同时放在 A 的同一个拐角处(证明细节请读者自行补全).

继续定理 2 的证明 在矩形 R 的简单铺盖中,这里 R 的面积大于 9,设 n_i 代表面积为 i 的砖的块数. 从不等式(1)和引理,我们有

$$5n_1\leqslant \sum_{A} v(A)\leqslant n_2+7n_3+7n_4+14\sum_{i>4} n_i$$

$$\leqslant \sum_{i\geqslant 2}(6i-11)n_i. \qquad (2)$$

从(2)可以推出

$$R\text{ 的面积} = \sum_{i\geqslant 1} in_i \geqslant \frac{11}{6}\sum_{i\geqslant 1} n_i. \qquad (3)$$

因为 $\sum_{i\geqslant 1} n_i$ 就是该铺盖的砖数，因此(3)推出，在 R 的任何简单铺盖中，砖的平均面积不超过 11/6.

现在让我们集中注意(3)式等号成立的情况. 这时推出(2)必定是等式，特别地有

$$n_2 + 7n_3 + 7n_4 + 14\sum_{i>4} n_i = \sum_{i\geqslant 2}(6i-11)n_i,$$

也就是

$$0 = 6n_4 + 5n_5 + 11n_6 + 17n_7 + \cdots$$

要想让此式成立，只有使 $n_i=0$，对于 $i\geqslant 4$.

(3)式等号成立的进一步推论乃是铺盖中每一个面积为 2 的砖 A 有两块 1×1 邻砖，每一个面积为 3 的砖 A 有如图 7(a)和 7(b)所示的邻砖. 由于(3)式等号成立还可以推出(1)式等号必定成立，那么在铺盖中的任何单位砖 U 必定是如图 8 所示的那样被包围着. 现在推出，如图 7(b)所示的那种 1×2 的砖 A 必定是安排成如图 2 所示的形状的一部分. 然而，对于简单铺盖来说，这是不可能的. 因此，对于一块面积为 3 的砖 A 来说，它的放置必定是如图 7(a)所示的那样. 对此我们简单地说，每一块 1×2 的砖必定有对角反向的两块 1×1 邻砖，也就是如图 7(a)所示的那样(或是这个反射像).

最后，如果我们从图 7(a)所示的图形出发，对单位方砖来说应用图 8 的两种样式，以及对所有的 1×2 砖来说应用以上的说明，就会得到平面的唯一的(不计反射)铺盖方式. 这种铺盖方式如图 9(a)所示. 注意，这是由图 9(b)所展示的砖经

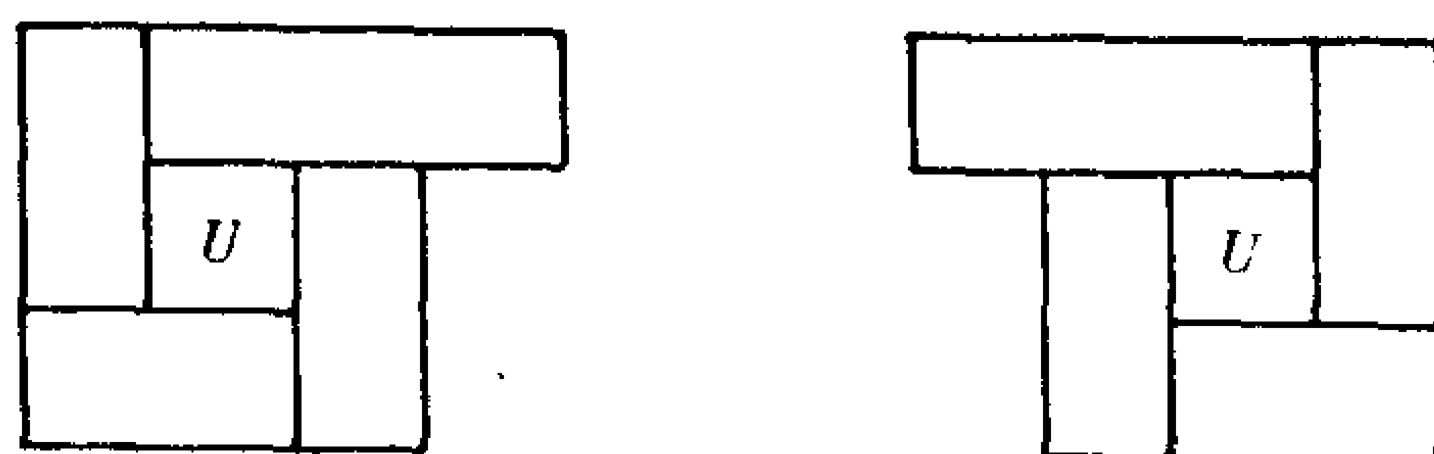


图 8

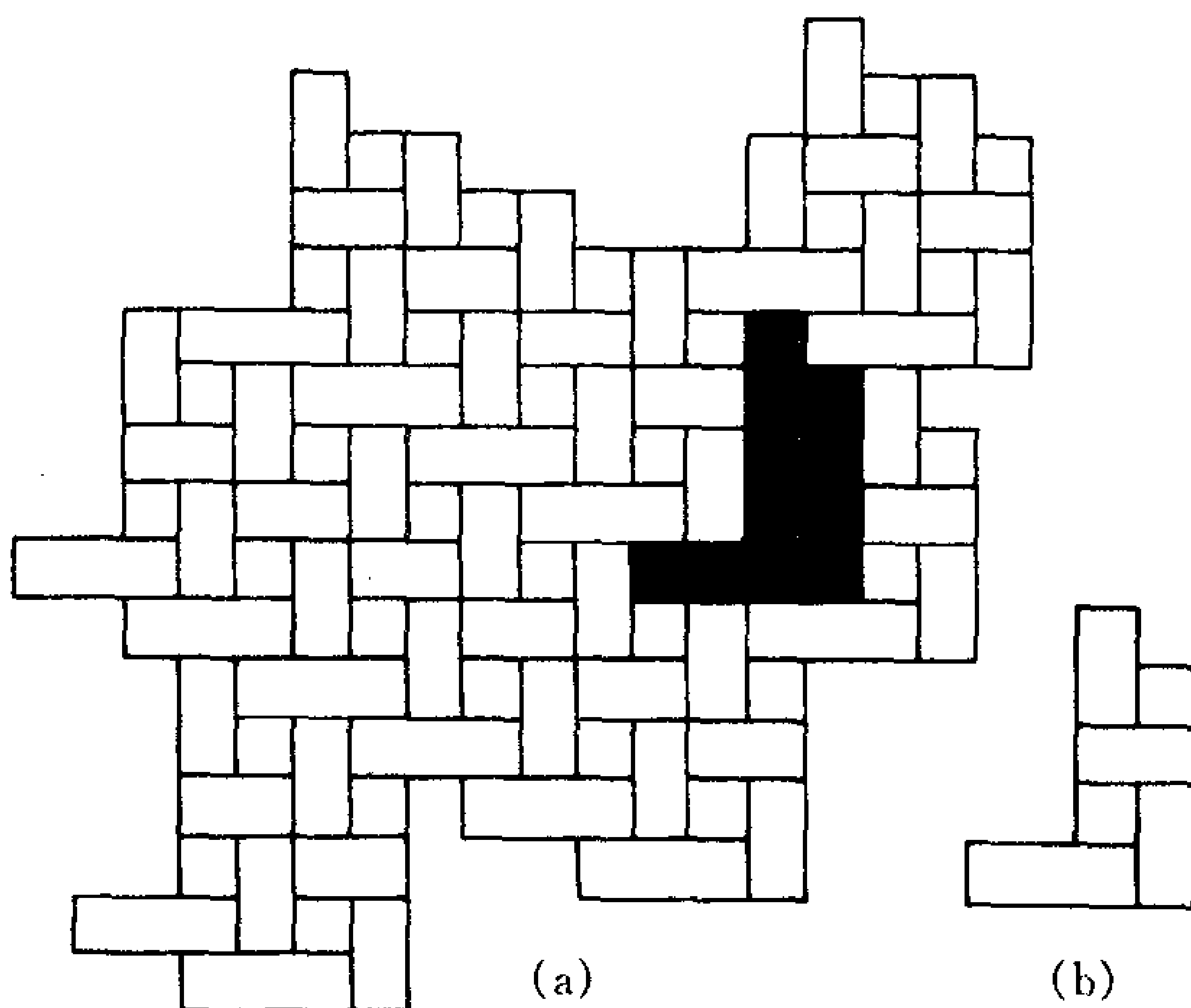


图 9

过平移拼合而形成的.此外还不难验证这种拼合过程不会终止,以致恰好形成一个矩形的简单铺盖.于是可知,任何一个具体矩形的简单铺盖,其砖的平均面积都会严格地大于11/6.然而,如果我们运用平移图 9(b)所展示的模块 B 的方式,铺成一个很大的接近于矩形的图形 S,那么不难看出 S 的参差不齐的边界可以使用少数适当的砖(其面积可能大于 3)来补充铺成一个矩形,从而形成该矩形的一个简单铺盖,这个简单铺盖的砖的平均面积就会接近于 11/6,其接近程度将依赖于

S 的大小. 我们放弃这种构造方式的细节,留给读者思索完成.

关于用矩形铺满矩形的论题,还有许多很好的参考文献. 对此感兴趣的读者可以参阅其中的一些(例如[1],[14],特别是[6]).

同许多几何问题一样,人们自然地要问,在三维(或更高维)空间中,类似的问题如何?据我们所知,尽管这是一个需要深入探索的有趣的研究领域,但是对此我们几乎一无所知.

(杨燕昌编译,潘承彪校)

参考文献

[1] C. J. Bouwkamp, On the dissection of rectangles into squares, *I. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **49** (1946), 1172~1178; Ⅱ, Ⅲ, **50** (1947), 58~71, 72~78.

[2] C. J. Bouwkamp, A. J. W. Duijvestijn, and P. Medema, Tables relating to simple squared rectangles of orders 9 through 15, Technische Hogeschool, Eindhoven, Netherlands, 1960.

[3] C. J. Bouwkamp, A. J. W. Duijvestijn and J. Haubrich, Catalogue of simple perfect rectangles of orders 9 through 18, Philips Research Laboratories, Eindhoven, Netherlands, 1964; unpublished.

[4] R. L. Brooks, C. A. B. Smith, A. H. Stone, and W. T. Tutte, The dissection of rectangles into squares, Duke Math. J., **7**(1940), 312~340.

[5] A. J. W. Duijvestijn, Electronic computation of squared rectangles, dissertation, Technische Hogeschool, Eindhoven, Netherlands; also in *Philips Res. Rep.*, **17**(1962), 523~612.

[6] ____, Simple perfect squared squares of lowest order, J. Comb. Theory, B25 (1978), 260~263.

[7] A. J. W. Duijvestijn, P. J. Federico and P. Leeuw, Compound perfect squares, *Amer. Math. Monthly*, **89**(1982), 15~32.

[8] P. J. Federico, Note on some low-order perfect squares, *Can. J. Math.*, **15** (1963), 350～362.

[9] ____, Squaring rectangles and squares: A historical review with annotated bibliography, in Graph Theory and Related Topics, J. A. Bondy and U. S. R. Murty, eds., Academic Press, 1979, pp. 173～196.

[10] Martin Gardner, Mystery tiles at Murray Hill, *Isaac Asimov's Science Fiction Mag.*, **6**(1982), 40～42.

[11] R. L. Graham, Fault-free tilings of rectangles, in The Mathematical Gardner, D. A. Kiarner, ed., Wadsworth Int'l., Belmont, California, 1981, pp. 120～126.

[12] N. D. Kazarinoff and R. Weitzenkamp, On existence of compound perfect squares of small order, J. Comb. Theory, B**14**(1973), 163～179.

[13] ____, Squaring rectangles and squares, *Amer. Math. Monthly*, **80**(1973), 877～888.

[14] P. Leeuw, Electronic computation of compound squared squares Bachelor's thesis, Twente Technical University, Enschede, Netherlands, 1979.

有关覆盖矩形的一个结论的十二个证明[①]

斯·瓦根

§1 引　言

本文是从这样一类问题引起的，如何能用同样大小的小矩形块来覆盖一个大矩形；用同样大小的小长方体砖块来覆盖一个大长方体盒子；以及用同样大小的 n 维小“砖块”来覆盖一个 n 维大“盒子”等等. 这里“覆盖”一词的意思是指既不留下空隙，而且小砖块之间也不互相重叠. 1969 年，德布鲁因(N. G. De Bruijn)对 n 维砖块铺满 n 维盒子这个问题证明了一个结论(见文献[2]或[5]). 如果限于 $n=2$ 的情形，他的结果说的是：如果用长、宽各为 c,d 的同样大的矩形(简记为 $c\times d$矩形，以下同)能覆盖住一个 $a\times b$ 矩形，那么 c 与 d 必定能同时整除[②]a,b 中的一个. 将德布鲁因的证明加以推广，可得出下面的定理(图 1 是这个定理的一个实例). 这个定理也蕴含了德布鲁因关于砖块铺盒子问题的结论(在 $n=2$ 的情形，要分别用 c 及 d 来除盒子的每一边长).

定理 1　若一个矩形可以用另一些至少有一边长是整数的矩形来覆盖，那么被覆盖的矩形至少有一边是整数.

1985 年，美国数学会在怀俄明州(Wyoming)的拉那米

---

① 本文全文原载《美国数学月刊》，**94**(1987)，601～617.

② 这里所说的整除是指：对两个实数 α,β，如果存在整数 q 使得 $\beta=q\alpha$，那么就说 α 整除 β.

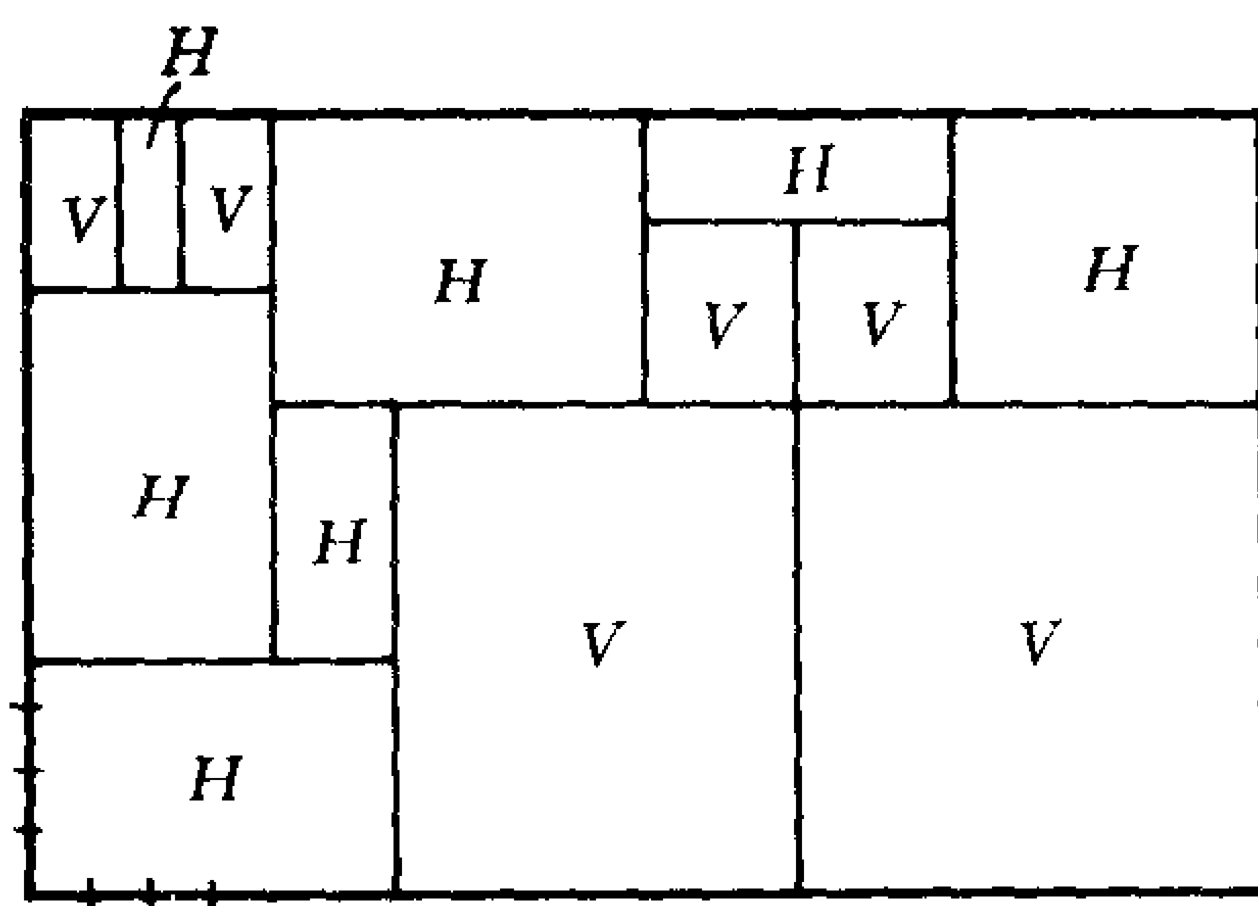


图 1　覆盖的一个例子，其中每块砖至少有一边的长为整数. 标有"H"的砖的宽为整数，标有"V"的砖的高为整数.

(Laramie)召开了一次夏季会议. 会上，美国著名数学家蒙哥马利(H. Montgomery)提到了这个定理以及对这个定理用二重积分法所给出的一个证明，他希望以此来激励人们寻求更为初等的证明. 自此以后，许多国家的数学家都研究了这个问题，证明这个定理用到各种各样的技巧，着实令人惊叹不已！爱多士(P. Erdös)曾经说过这样的话："[上帝]有一部记有定理的天书，上面写的都是证明各个定理的最佳证法."然而，至于下面要述及的诸种证明中哪一个是最佳证明，却绝非那么清楚明白. 也可能这些证明中没有一个写在上帝的那本书里，"最好的"证明尚待人们去发现. 即便是只拿证明的简洁来作为判别的标准，也还是不能完全确定孰优孰劣，不过看来棋盘法与偶图(bipartite graph)证法最有可能被评为最佳证法. 但如果考虑证法的威力，即此种证法能否(可能要在作适当的修改后)导出更一般性的结论，那么情况就复杂了. 这一定理的变体在圆柱、环面、高维情形以及对多重覆盖都是成立的，然而就推广定理的结论而言，下面要述及的证明中没有一个能

算得上是最佳证法.

曹恩(M. Zorn)指出,戴恩(Dehn)于 1903 年就曾考虑过类似的问题. 作为一种颇不相同的研究成果的推论,戴恩证明了: 如果一个矩形如同定理 1 所示被覆盖,那么它有一边长必是有理数(参见[3]p. 327).

§2 证　　明

给定一个矩形,它的水平边及垂直边分别称为它的宽及高. 给定一个覆盖如定理 1 所示,用 R 来表示被覆盖的矩形. 我们把宽为整数的砖块称为 H-砖("水平砖"),高为整数的砖块称为 V-砖("垂直砖"). 通常将矩形 R 的左下角放在原点,而它的各边分别与各坐标轴平行,这样的矩形称为处于标准位置.

证法(1)[①] 复的重积分法(拓广了德布鲁因原来的方法). 由直接积分容易得到

$$\int_a^b \sin 2\pi x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin\pi(a+b)\sin\pi(a-b)}{\pi},$$

$$\int_a^b \cos 2\pi x \, \mathrm{d}x = \frac{-\cos\pi(a+b)\sin\pi(a-b)}{\pi}.$$

故当且仅当 $a+b$ 是整数,或 $a-b$ 是整数时有

$$\int_a^b \sin 2\pi x \, \mathrm{d}x = 0;$$

以及当且仅当 $a-b$ 是整数或 $a+b-\frac{1}{2}$ 为整数时,有

$$\int_a^b \cos 2\pi x \, \mathrm{d}x = 0.$$

---

① 还没有学过微积分的读者可先不看证明(1)和(2). 这并不影响看其他的证明.

下面我们来考虑任给的一个矩形 T，设它的边分别与各坐标轴平行，设它的四个顶点分别表示为：(a_1,c_1)，(b_1,c_1)，(a_1,d_1)，(b_1,d_1). 考虑函数 $e^{2\pi i(x+y)}$ 在 T 上的二重积分

$$S_1 = \iint_T e^{2\pi i(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

容易算出

$$S_1 = \frac{1}{\pi}\sin\pi(b_1 - a_1)\int_{c_1+\frac{b_1+a_1}{2}}^{d_1+\frac{b_1+a_1}{2}}[\cos(2\pi x) + \sin(2\pi x)]\mathrm{d}x$$

由前面的讨论知道，积分 S_1 为零的充分必要条件是：b_1-a_1 与 d_1-c_1 中至少有一个是整数，也就是说 T 至少有一边长为整数.

由此可知，将上面的 T 换成任一个至少有一边长为整数的砖块长方形，所得积分值都为零. 把覆盖 R 的所有这些砖块 H 或 V 上的这种积分相加，我们发现有

$$\iint_R e^{2\pi i(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

因此被覆盖的大矩形 R 也至少有一边长为整数. 定理 1 证毕.

证法(2) 实二重积分法(复二重积分证法的变形). 设 R 是一个处于标准位置的 $a\times b$ 矩形，这里 a 与 b 表示它的平行于 x 轴及平行于 y 轴的边的长度. 这次改为考虑实二重积分

$$S_2 = \iint_T \sin 2\pi x \sin 2\pi y \,\mathrm{d}A.$$

设 T 是以(a_1,c_1)，(b_1,c_1)，(a_1,d_1)，(b_1,d_1)为顶点的矩形，容易看出

$$S_2 = \frac{1}{4\pi^2}(\cos 2\pi b_1 - \cos 2\pi a_1)(\cos 2\pi d_1 - \cos 2\pi c_1).$$

当 T 的两边长 b_1-a_1 与 d_1-c_1 中至少有一为整数时，显然有 $S_2=0$，于是，当 T 是任一个 H-砖或 V-砖时必有 $S_2=0$，相加即得

$$S_3=\iint_R \sin 2\pi x \sin 2\pi y \, \mathrm{d}A=0.$$

注意到 R 处于标准位置，即 R 的四顶点分别为$(0,0)$，$(a,0)$，$(0,b)$，(a,b). 所以有

$$S_3=(\cos 2\pi a-1)(\cos 2\pi b-1)=0,$$

于是 a,b 中至少有一为整数，这也完成了定理 1 的证明.

注意，我们也可以改用其他实函数的积分来证明. 例如，可以考虑积分

$$\iint_T \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\left(y-[y]-\frac{1}{2}\right) \mathrm{d}A$$

等等，有兴趣的读者可以独立补出证明细节，这里记号$[x]$表示不超过 x 的整数部分. 附带补充一句：如果读者能绘出函数 $x-[x]-1/2$ 的图像，并注意到积分与面积之间的联系，则不难体会到应用这个二重积分的关键所在.

证法(3)　棋盘法（罗赫伯格（R. Rochberg），斯太因（S. K. Stein））. 仍将矩形 R 置于标准位置. 从左下角的顶点$(0,0)$开始，分别向右及向上按 1/2 为边长将 R 分成若干边长为 1/2 的正方形及若干每边长至多为 1/2 的长方形，相间涂以黑、白两色. 为确定起见，不妨设左下角第一个小正方形被涂以黑色（见图 2），这样得到一个与国际象棋相似的图形.

一方面，已知 R 能被若干个 H-砖及 V-砖所覆盖. 对每个 H-砖或 V-砖来说，由于它至少有一边长为整数，因而每个砖所包含的黑、白两色正方形及长方形不但个数分别相等，而且黑块所占面积与白块所占面积也相等. 因此总起来看，R 中所

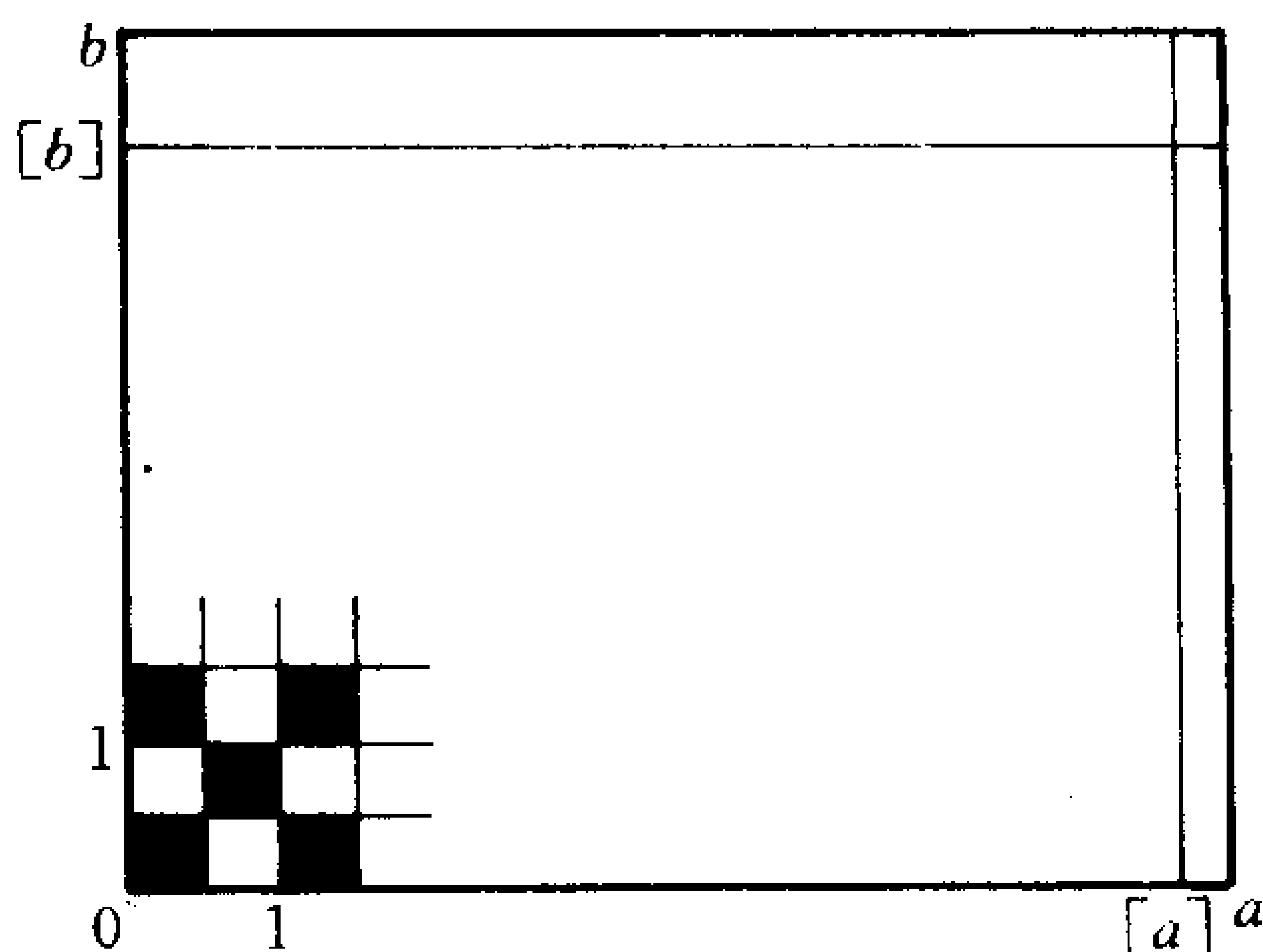


图 2　如果 a 与 b 皆不为整数，那么右上角处黑方块比白方块多出一块.

含的黑、白小块不但个数一定相等，其所占面积也相等.

另一方面，假若 R 没有一边长为整数，我们可以如图 2 那样把 R 分成四大块，在其中左下、左上及右下这三块中，所含黑、白两色小块不但个数相等，且所占面积也相等，这是由于这三块各至少一边长为整数之故. 对于右上角那一块，按照其边长的不同可分为以下四种情形讨论之（简记右上角这块为 R^*）：

情形一　$0<a-[a]\leqslant 1/2$ 且 $0<b-[b]\leqslant 1/2$，此时 R^* 中显然只有一个黑小块；

情形二　$0<a-[a]\leqslant 1/2$ 且 $b-[b]>1/2$，此时 R^* 中显然恰有一黑一白两小块，且黑块面积比白块大；

情形三　$a-[a]>1/2$ 且 $0<b-[b]\leqslant 1/2$，此时 R^* 中仍恰有一黑一白两小块，且黑块占的面积比白块大；

情形四　$a-[a]>1/2$ 且 $b-[b]>1/2$，此时 R^* 中恰有两个黑小块及两个白小块，但黑块面积比白块面积大（读者试证之）.

综上可知，若 R 没有一边长为整数，那么 R 中黑块所占面积必大于白块所占面积. 这个矛盾就完成了定理 1 的证明.

注意，只要在第二个证法中把被积函数换为 $(-1)^{[2x]}(-1)^{[2y]}$，就会得到我们这里的棋盘证法，请读者自行验证之.

证法(4) 正方形计数法(鲁子沙(I. Z. Ruzsa)，基尔伯特(P. Gilbert)). 将矩形 R 置于标准位置，设诸砖的竖直边的横坐标及水平边的纵坐标分别为 x_i 及 y_j. 我们用以下方法来构造一个(可能是新的)矩形 R' 及其一个覆盖. 对于横坐标 x_i 为整数值的竖直边及纵坐标 y_j 为整数值的水平边，仍保留原状不作移动. 一个砖块(无论是 H-砖还是 V-砖)，如果它的竖直边对应的横坐标 x_i 不是整数，我们就把它向右或向左平行移动到横坐标为 $x=[x_i]+1/2$ 处；如果它的水平边对应的纵坐标 y_j 不为整数，就将它向上或向下作平行移动，移到纵坐标为 $y=[y_j]+1/2$ 处. 这样一来原来的 H-砖、V-砖变成了一些可能是新的 H-砖、V-砖，矩形 R 就变为一个可能是新的矩形 R'，且新的 H-砖、V-砖是 R' 的一个覆盖. 如果 R 没有一边长是整数的话，那么 R' 的每边长就刚好都是某个奇整数的一半. 如上法将 R' 分成边长为 1/2 的小正方形，则 R' 中所含的小正方形恰有奇数个. 另一方面，容易看出，经这样的平移后所得的每个新的 H-砖或 V-砖包含的小正方形个数均为偶数(这是因为原有的每个小砖块都至少有相应的一边长为整数)，因而合起来 R' 中也应有偶数个小正方形，这个矛盾就完成了定理 1 的证明.

证法(5) 多项式法(杜阿第(A. Douady)). 置矩形 R 于标准位置并且与证法(4)类似地来构造出一个辅助覆盖，其方法如下. 选择一个参数 t 且只平移那些有非整数值坐标的边.

把坐标为 $x=x_i$ 的非整数坐标的垂直边向右移到 $x=x_i+t$，把坐标为 $y=y_j$ 的非整数坐标水平边向上移到 $y=y_j+t$. 如果 $t\in(0,\varepsilon]$ 且 ε 充分小，我们就得到新矩形 R' 及其一个覆盖，R' 中的砖块总数与 R 中的一样多.

如果 R 没有一边长为整数，则 R' 是一个边长各为 $a+t$ 及 $b+t$ 的矩形，R' 的面积 $(a+t)(b+t)$ 是 t 的一个二次多项式. 另一方面，由于覆盖 R 的每个 H-砖或 V-砖均至少有一边长为整数，因而在经过平移后得到的小砖块的面积要么是与 t 无关的常数（这时原砖块两边长均为整数），要么是 t 的线性函数（这时原砖块恰有一边长为整数），相加即知，R' 的面积也应是常数或是 t 的线性函数. 这个矛盾证明了定理 1 的结论.

证法(6) 素数法(罗宾森(R. Robinson)). 我们断言：对每一个素数 p，要么 R 的长，要么 R 的宽与某个整数相差不超过 $1/p$. 为证明这个结论，我们把 R 的长、宽各扩大到原来的 p 倍，相应地，原来覆盖 R 的每个 H-砖或 V-砖的各边长也均为原来的 p 倍. 注意到原来每个 H-砖(V-砖)的宽(长)为整数，于是就得知，扩大后的矩形 R 之边长分别为 pa 及 pb，而扩大后的 H-砖(V-砖)的宽(长)是 p 的整数倍. 把砖块的每个顶点坐标 (x,y) 换为 $([x],[y])$，就将扩大后的 R 变为一个边长均为整数 $[pa]$、$[pb]$ 的长方形 R^*，其中每个砖块变为边长皆为整数且至少一边长是 p 的整倍数的新砖块，这每个新砖块的面积自然是 p 的整倍数，从而 R^* 的面积也应为 p 的整倍数. 由于 p 为素数，R^* 必至少有一边长应是 p 的整倍数，不妨设 $[pa]$ 是 p 的整倍数. 如果 $a-[a]>1/p$，可令 $a=[a]+\theta$，$1/p<\theta<1$，于是有

$$[pa]=p[a]+[p\theta],$$

注意到

$$p > [p\theta] \geqslant 1,$$

即得

$$p([a]+1) > [pa] \geqslant p[a]+1,$$

这与 p 整除$[pa]$矛盾，于是必有 $a-[a]\leqslant 1/p$.

由于素数 p 有无穷多个，上述结论表明，存在无穷多个素数 p 使下两式至少一个恒成立(为什么)：

$$a-[a]\leqslant 1/p,$$
$$b-[b]\leqslant 1/p.$$

令 $p\to\infty$，即得 a 与 b 中至少有一个是整数.

证法(7) 欧拉路径法(帕特森(M. S. Paterson)). 由所给矩形 R 的覆盖如下法作一个图 Γ：这个图 Γ 的顶点由覆盖 R 的所有砖块的顶点组成，如果两个顶点恰为一个 H-砖的某水平边的两端点，或恰为一个 V-砖的某垂直边的两端点，则在此两顶点间连一线. 有可能两点间连线超过一条，为使图 Γ 能在平面上看得更清楚，我们把每条连线向定义这条线的那

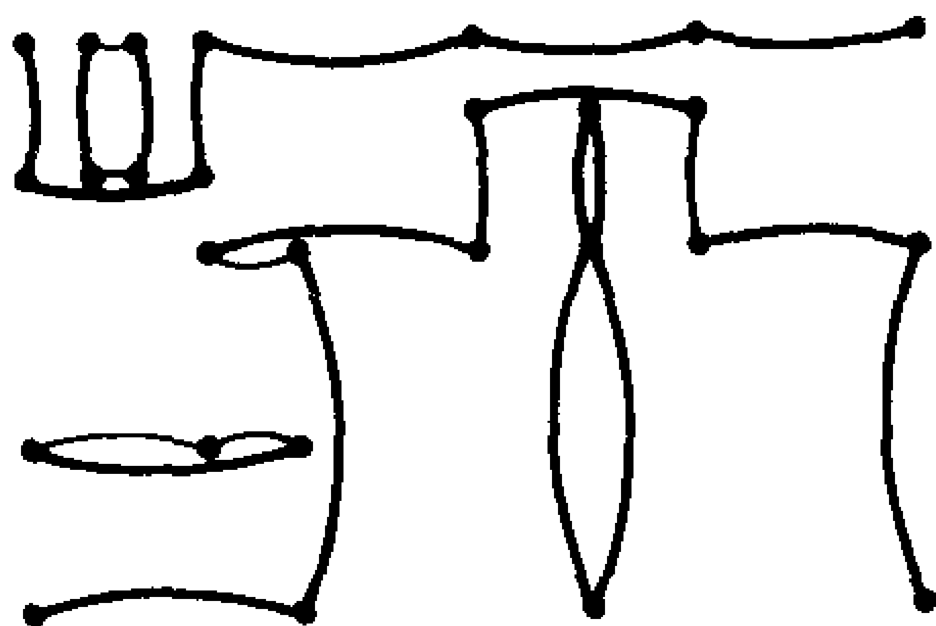


图 3　根据图 1 中的覆盖作出的殆欧拉图 Γ.

块砖的方向稍加弯曲(参见图 3). 根据定义，由于 R 的四个顶点各只在一个砖块上，它们各只能是某一个 H-砖的一条水平边的一端点或是某 V-砖的一条竖直边的一端点，从而这四

个顶点在图 Γ 中恰各只在一条连线上. 除此四顶点外的任一个顶点要么是两个砖块的公共顶点，要么是四个砖块的公共顶点，由我们对 Γ 的作法知，每个这样的顶点在 Γ 上必定是某两条连线(也称为 Γ 的棱边)或某四条连线的公共端点. 这说明在图 Γ 中，只有 R 的四个顶点是奇顶点且从每个这样的顶点出发的棱只有一条，而从其余砖块的顶点出发的棱皆为偶数条(2 条或 4 条). 由欧拉路径的理论(例如参见哈拉里 F. Harary 著《图论》第七章，该书有中译本)知，从四个奇顶点的任一点出发，不重复经过 Γ 的棱，则此运动必在遇到另一个奇顶点时才可能终止，由于 Γ 中每条棱边对应的砖的边长皆为整数，这证明了 R 至少有一边长为整数.

证法(8) 偶图法(欧拉路径证法的变体). 置 R 于标准位置，令 S 为由覆盖 R 的诸砖块的两坐标均为整数的那种顶点组成的集合，而用 T 表示全体砖块组成之集合. 把 S 中每个成员(它是一个点)及 T 中每个成员(它是一个砖块)都作为一个新的点，对这样新定义的点集 $S\cup T$ 按下法作棱边，从而造出一个新的图 Γ_1 来：如果 S 中某点是 T 中某砖块的顶点，就在它们对应的两个新点间连一条棱. 由定理条件知，每个砖块至少有一对边长是整数，也可能两对边长均为整数. 因而，每个砖块的四顶点中能属于 S 的顶点个数必为 0,2,4 这三数之一，即图 Γ_1 中必恰有偶数条棱边. 另一方面，如证法(7)中所述易见，S 中每个不是 R 的顶点的点均为两个或是四个砖块的公共顶点，唯独点(0,0)只是一个砖块的顶点且(0,0)属于 S，为了使图 Γ_1 中有偶数条棱，在 S 中必须还要有一个点恰与奇数条棱相连，而这个点只可能是 R 的某个顶点. 这就证明了 R 至少有一边长为整数.

证法(9) 归纳法(罗宾森). 首先对问题加以简化. 如果

一个砖块长为整数，我们总可以把它分为几个小砖块，每个小砖块一边长为 1. 于是我们不妨可以假设覆盖 R 的每个 H-砖宽为 1，而每个 V-砖的高为 1. 我们来对 H-砖的个数进行归纳证明.

如果在 R 的这个覆盖中不出现任何 H-砖，则显然 R 的高必为整数，结论已成立. 不然的话，可从中任取出一个 H-砖来，记为 T_0. 我们来看是否存在其他的 H-砖，它们的下水平边与 T_0 的上水平边有公共线段. 如果不存在，就把 T_0 的两竖直边各向上延长 1，得到的新矩形有一个新的上水平边，再寻找与此上水平边有公共线段的 H-砖. 如果这种与 T_0 的上水平边有公共线段的 H-砖存在，任取其一记为 T_1，如此向上直至达到 R 的上水平边为止，同法可向下先求 H-砖 T_{-1}，T_{-1}的上水平边与 T_0 的下水平边有公共线段，如此直至达到 R 的下水平边为止. 这样做不会增加原有 H-砖的个数. 此外，在找不到 T_1 将 T_0 向上提升两竖直边的过程中(对向下亦然)，被切断后剩下的 V-砖残块仍是一个高为 1 的 V-砖. 这样我们得到一列 H-砖

$$T_{-n},\cdots,T_{-1},T_0,T_1,\cdots,T_m.$$

把这一列 H-砖从 R 中挖掉，并将割线重新粘合在一起. 由于每个 H-砖宽均为 1，我们仍得到一个新矩形 R^*，R^* 中 H-砖个数比 R 中的少. 由归纳假设，R^* 至少有一边长为整数. 由于 R 与 R^* 有相同的高，而 R 的宽比 R^* 的宽多 1，故定理 1 得证.

证法(10) 归纳法变体(毕少甫(R. Bishop)，瓦根(S. Wagon)). 首先来给出 V-线段链和 H-线段链的定义. 给定矩形 R 的一个覆盖，这些小砖的边在 R 内就给出了一些竖直线段和水平线段，并且可能出现这样的情形：若干条竖直线段

(或若干条水平线段)连成一条更长的竖直线段(或水平线段),我们称这样连成的竖直线段为 V-线段(或 H-线段). R 内的一条 V-线段称为 V-线段链,如果它不与 R 内的任一 H-线段成十字相交,而且在 R 内不存在包含它的另一 V-线段也具有这样的性质. 类似定义 H-线段链. 一条 V-线段链有左右两侧,如至少在其一侧连着的全是 H-砖,则称其为可移 V-线段链. 类似定义可移 H-线段链.

现在要来证明在 R 的任一给定的覆盖中必有可移 H-(或 V-)线段链存在. 用反证法,设 R 内既不存在可移 H-线段链,也不存在可移 V-线段链. 那么不难看出在 R 内存在从下水平边一直连结到上水平边的自下而上的一列 H-砖,每两个上下相邻的 H-砖之间是通过一条 H-线段链连结在一起的;同样地还存在从 R 的左竖直边一直连结到右竖直边的自左至右的一列 V-砖,每两个左右相邻的 V-砖之间通过一条 V-线段链连结在一起. 于是这两列砖必会在 R 内部相交,这交点必为某条 H-线段链与某条 V-线段链在它们内部的交点,这与 H-线段链及 V-线段链的定义矛盾.

现在不妨设 R 内有一条可移 V-线段链(例如,图 4(a)中的竖直线段 AB 就是一条可移 V-线段链,它的右边全是 H-砖与之相邻). 设在此可移 V-线段链某侧相邻的全部 H-砖(由定义,可移 V-线段链必有一侧全与 H-砖相邻)的最小宽度为 w,将此可移 V-线段链另一侧的所有砖块(不论是 H-砖还是 V-砖)均向该侧伸长 w,这样得到 R 的一个新的覆盖,其中 V-砖仍是一个 V-砖,H-砖仍是一个 H-砖(见图 4(b)). 而且这个移动至少使 R 原来覆盖中砖块的个数减少一块(在图 4(b)中是 H-砖个数比原来(a)中减少了一块). 这样,剩下的便可应用归纳法去完成了.

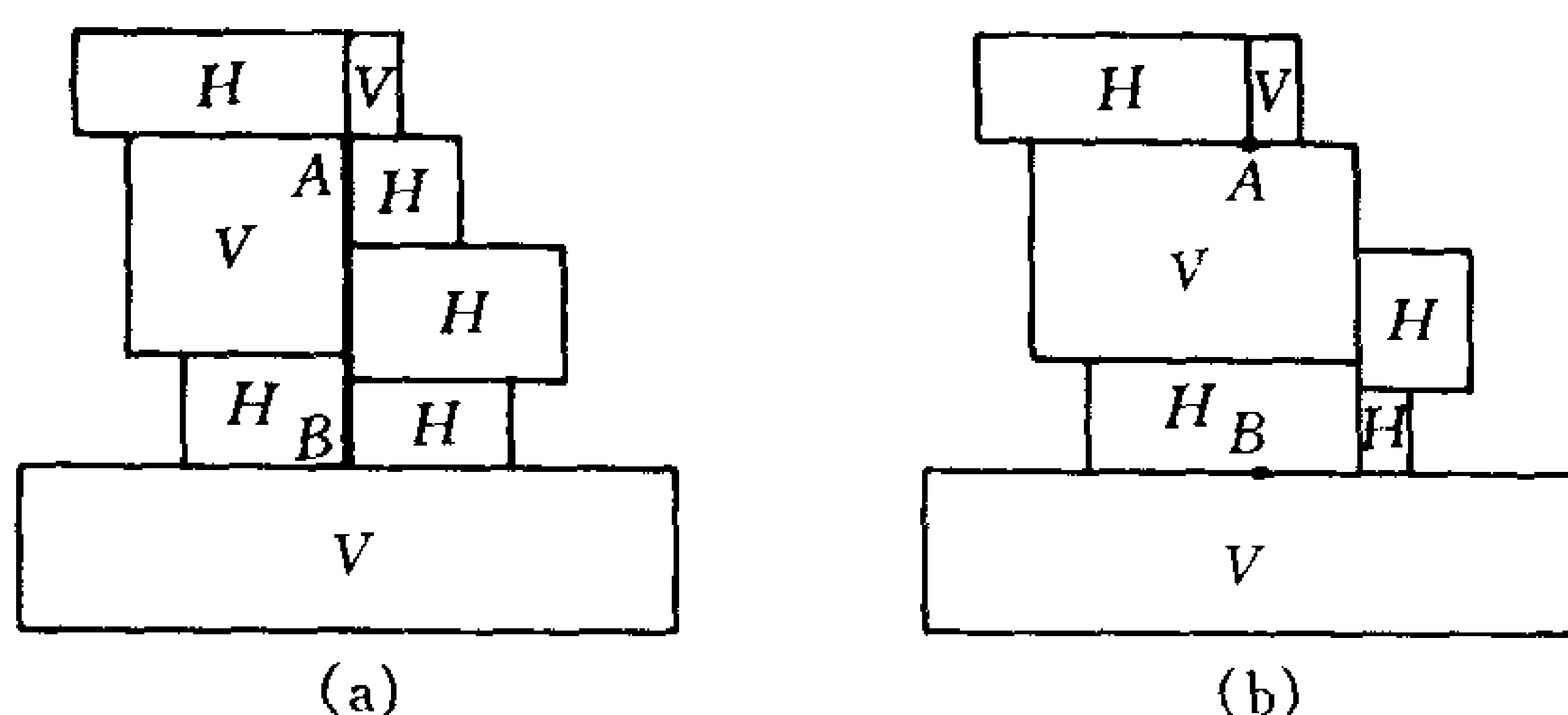


图 4　在(a)中，AB 是一条可约 V-线. 图(b)是 AB 左边的砖向右扩展后得到的新覆盖.

证法(11)　扫描线(sweep-line)法(巴赫曼(G. Bachman)，雅拉卡基斯(M. Yannakakis)). 设 R 是一个 $a\times b$ 矩形且处于标准位置. 假设 b 不是整数，设$\{R_i\}$表示覆盖 R 的诸砖组成之集合，但是我们在这里假设每块砖的底边那条闭线段被挖去了. 用 a_i 及 b_i 记每块砖 R_i 的宽及高. 如下法定义一个函数 f，f 的定义域为$[0,b]$，值域为$[0,a]$，函数值 $f(t)$按下法确定：如果与直线 $y=t$ 相交的砖中，所有顶边之纵坐标不为整数的砖为 $R_{k_1},\cdots,R_{k_s}$，就令 $f(t)=a_{k_1}+\cdots+a_{k_s}$. 于是 $f(0)=0$(为什么)，注意到 R 中每块砖必有一边长为整数，故函数 f 取值恒为整数(为什么)，从而 $f(b)$也必为一个整数. 但已知 b 不为整数，由定义知 $f(b)$恰为 R 的宽 a，故 $a=f(b)$为整数.

证法(12)　Sperner 引理证法(施麦尔(J. Schmerl)). 假设定理 1 的结论不成立且 R 处于标准位置. 在覆盖 R 的每块砖中任画一条对角线，这样就将 R 作了三角形剖分. 对每一块砖的每一顶点(x,y)如下法加以标记：若 x 为整数则记此顶点为 A；若 x 不为整数但 y 为整数，则记之为 B；若 x 与 y 皆不为整数，则记之为 C. 那么，根据 Sperner 引理的一个变

体(见文献[6]中的引理 2)知,标以 ABC 的这种三角形必有奇数个(请读者试证之).但另一方面,由于每块砖的四个顶点中每两个相邻的顶点必在同一水平或竖直线上,因而容易看出不可能出现标有 ABC 的三角形,这个矛盾就证明了定理 1.

(张明尧编译,潘承彪校)

参 考 文 献

[1] Donald J. Albers and G. L. Alexanderson, Mathematical People, Birkhauser, Boston, 1985.

[2] N. G. de Bruijn, Filling Boxes with Bricks, this *Monthly*, **76**(1969), 37～40.

[3] M. Dehn, Uber Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke, *Math. Ann.*, **57** (1903), 314～332.

[4] Hugo Hadwiger, Hans Debrunner, and Victor Klee, Combinatorial Geometry in the Plane, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.

[5] Richard Johnsonbaugh, De Bruijn's Packing Problem, in Two-year College Mathematics Readings, ed. W. Page, *Math. Assoc. Amer.*, 1981, 258～262.

[6] D. G. Mead, Dissection of the Hypercube into Simplices, *Proc. Amer. Math. Soc*, **76**(1979), 302～304.

[7] Robin J. Wilson, Introduction to Graph Theory, Academic Press, New York, 1972.

迷 宫 难 题[①]

S. Kravitz

曾经举行过一次解难题的竞赛，要求参赛者去解一系列类型相同但难度不断增加的迷宫难题. 本文介绍这种类型的迷宫问题，并用 Euler 解"哥尼斯堡的 7 座桥"(Seven Bridges of Königsburg)问题的方法解这些难题.

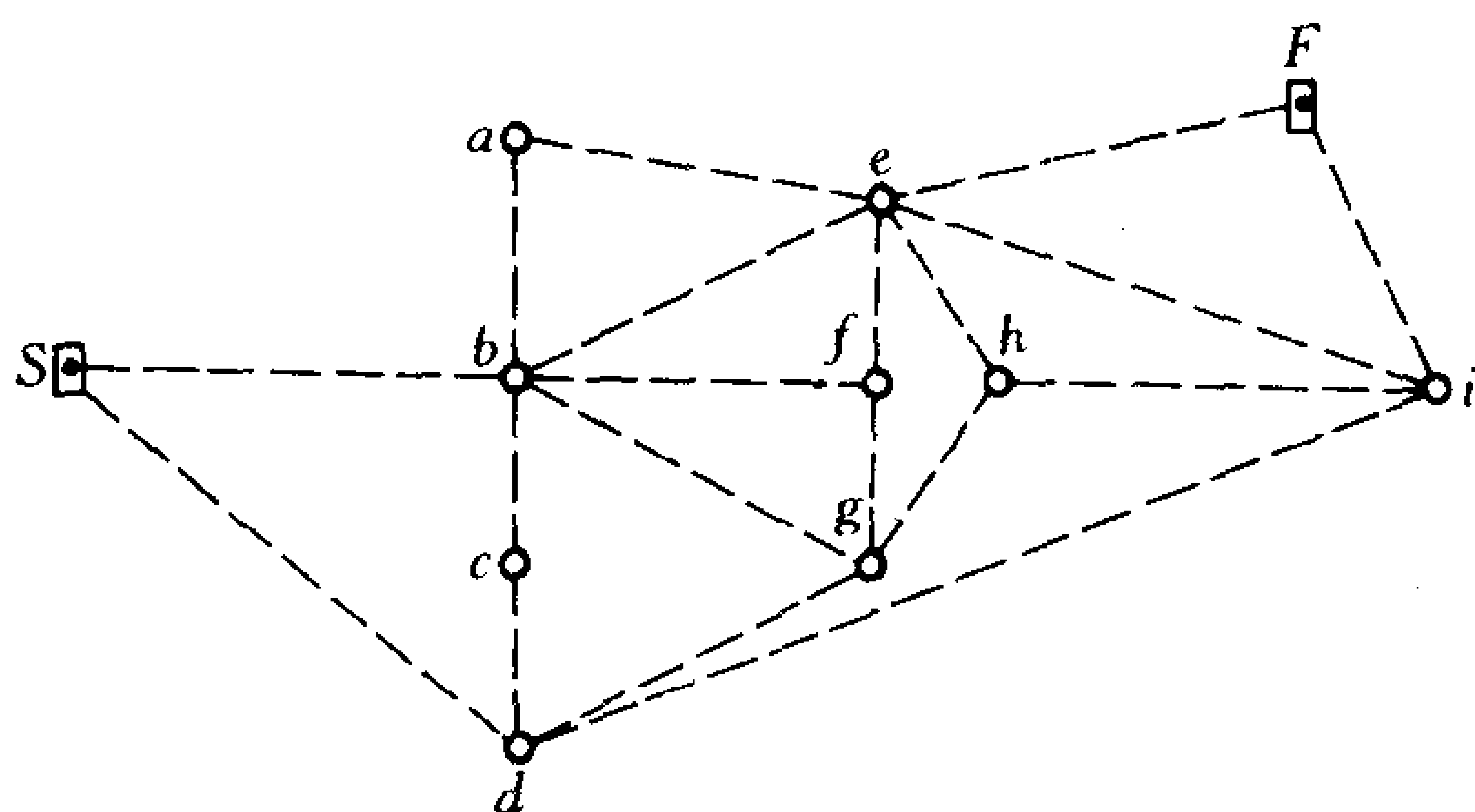


图 1

这类问题的一个简单例子如图 1 所示. 已知有几块区域(图中的小圆部分，分别记为 $a,b,c,\cdots,h,i$)，每块区域上给定一个数值(因为不属于本文讨论的主要内容，所以图中未标明). 要求只能沿着图中给出的路径(虚线部分)从起点 S 走到终点 F，每块区域最多只能经过一次(注意：不需要经过每一块区域). 每经过一块区域，则将该区域上的数值作为参赛

① 编译自"Solving maze puzzles", *Math. Magazine*, **38**(1965), 213～217.

者的得分. 谁得分最高谁将获胜.

一个显见的想法是：如果能找到一条路线经过每一块区域，则必然得到最高分. 但问题是，这样的路线究竟有没有？数学上一种非常有用的方法是：先假定这样的路线是存在的，然后看看在这样的假定之下能得到些什么. 也许能得到一条或者几条正确的路线，也许会遇到逻辑上的矛盾，从而证明这样的路线是不可能的. 我们试用图 1 中的迷宫问题进行这方面的探讨.

为使一条路线只**经过**某个区域一次，则其中必须包含（而且只能包含）两条支路，沿着其中的一条进入该区域，而沿着另一条离开. 从图 1 可以看到，与区域 a 和 c 相连的支路均各只有两条. 因此，如果存在一条经过所有区域的路线，则其中必定用到这些支路. 即为进入和离开区域 a，这条路线中必须包含路段 ab 和 ae，由同样的道理，也必须包含路段 cd 和 bc，见图 2，其中的实线部分表示必须包含进去的路段，而虚线部分留待下一步考虑.

图 2

在图 2 中可以看到，这条路线已经经过区域 b，即由路段

bc 和 ab 进入和离开区域 b. 因为再也不能经过 b,所以与区域 b 相连的其他所有支路即路径 Sb,be,bf 和 bg,在以后的考虑中绝不能再用到. 图 3 显示了这一新的情况,我们用记号"—→| |←—"表示这段路径已被排除.

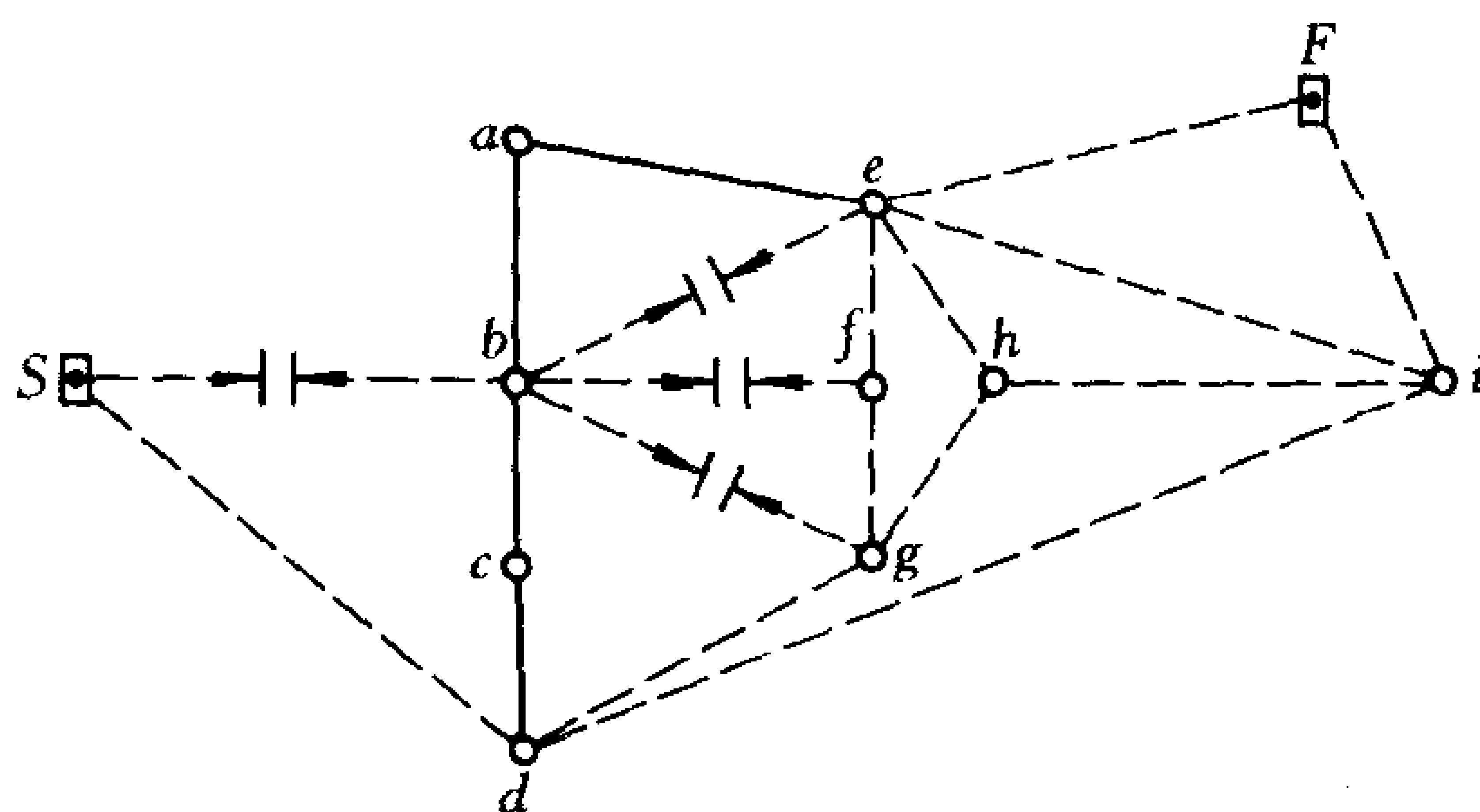


图 3

由于路径 bf 已被排除,因此经过区域 f 的路径只剩下两条,即 ef 和 fg. 同样地,因为路径 Sb 已不能再考虑,所以从区域 S 出发,只能走路径 Sd. 这些路段必须包含在路线之中,

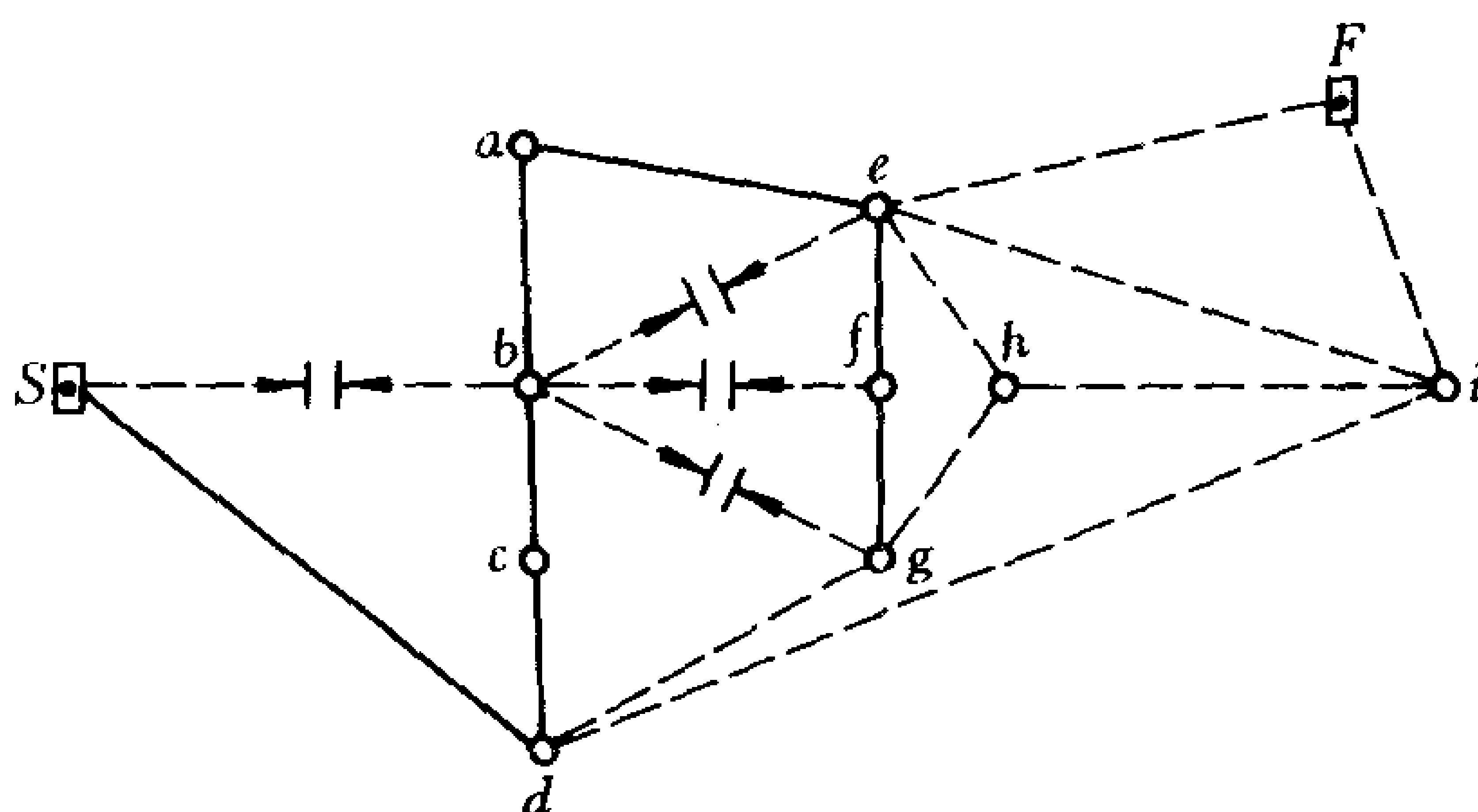


图 4

我们用实线标出,见图 4. 从中又可以看到,与区域 d 有关的

另两条路径 dg 和 di 必须被排除. 同样地,与区域 e 有关的三条路径,即 eF,ei 和 eh 也已不能再被考虑. 这一情况见图 5.

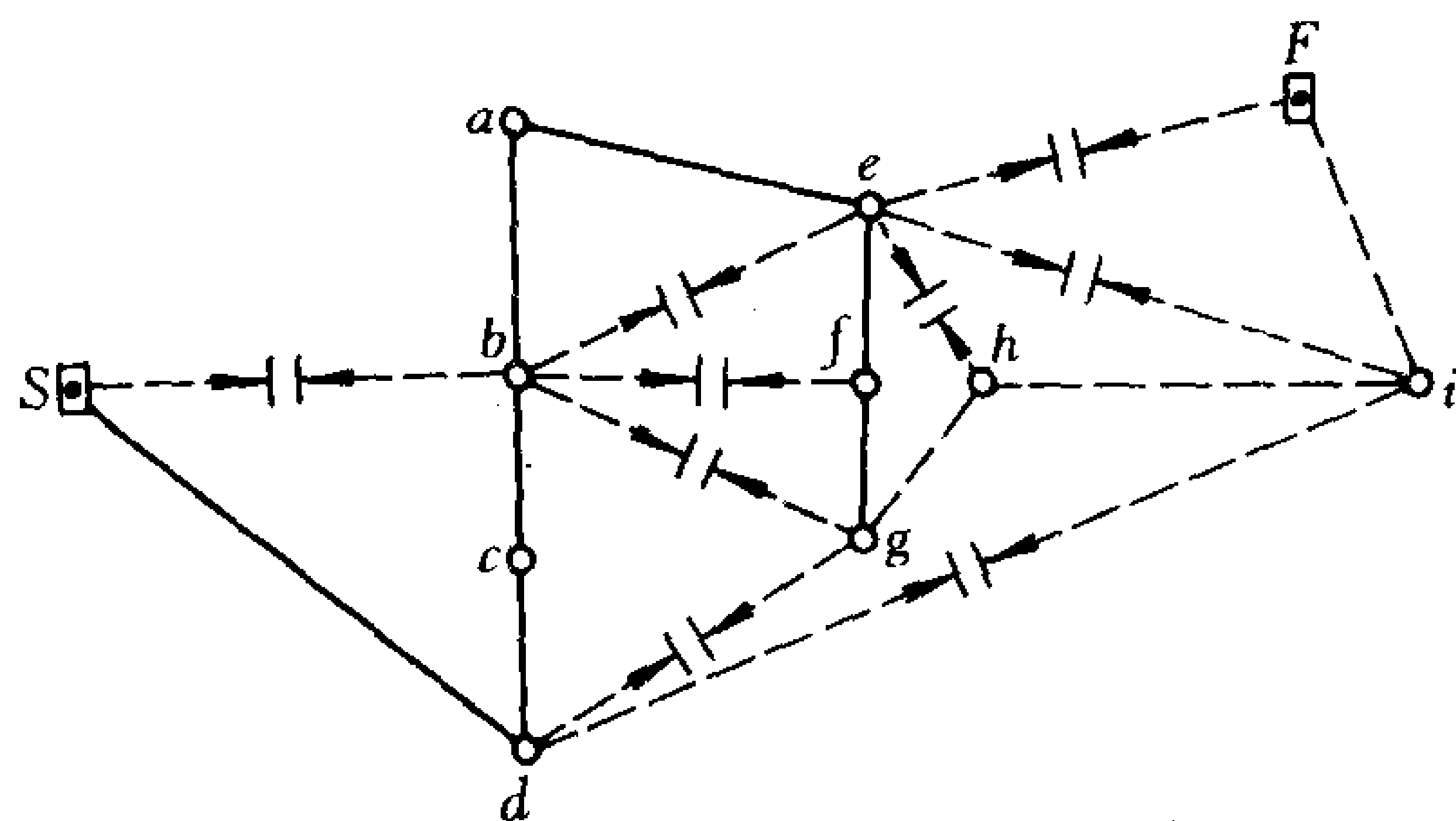


图 5

现在只剩下路径 gh,hi 和 iF 了. 问题的解见图 6.

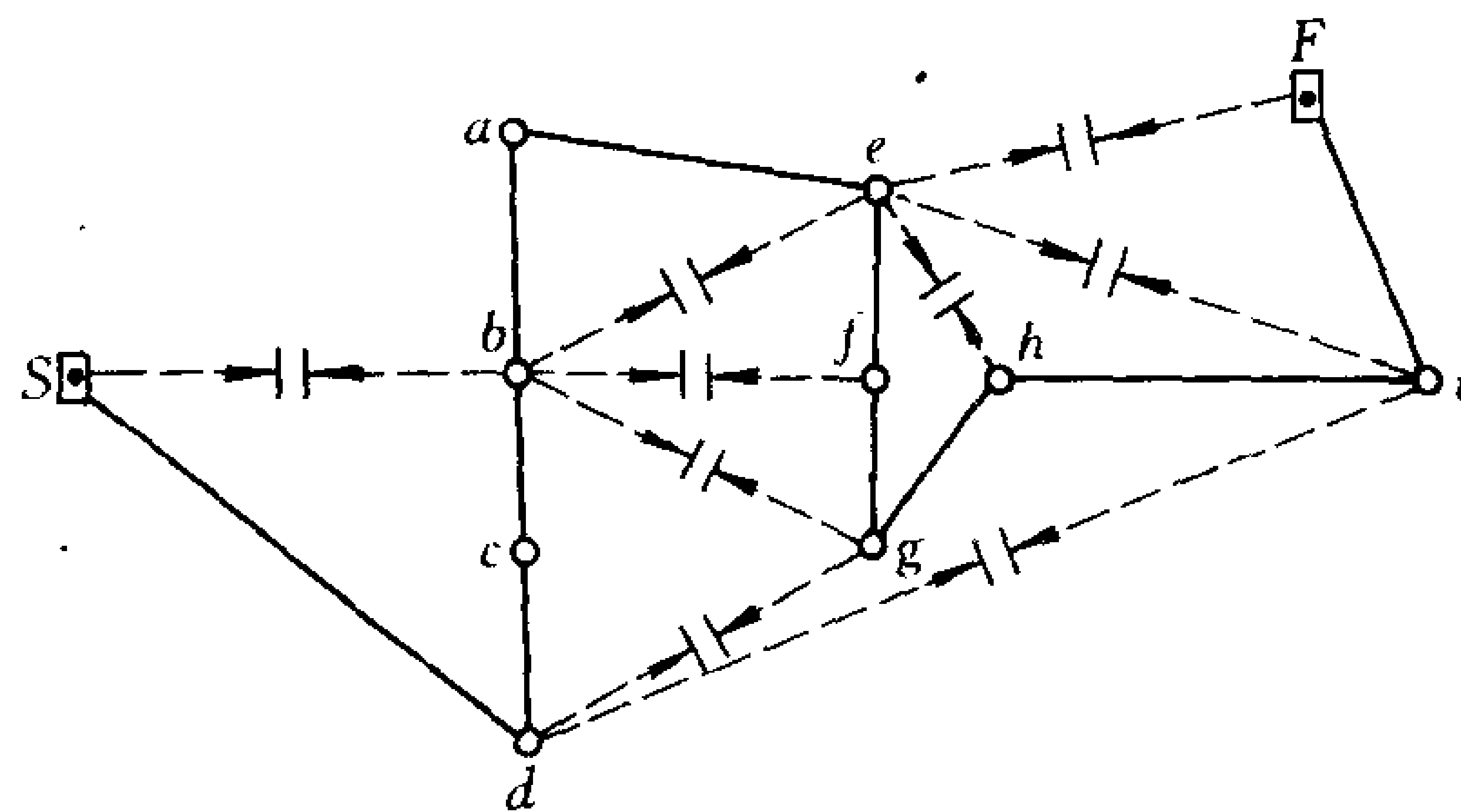


图 6

在解这类迷宫问题时,还有一些其他的有用的思考方法. 我们举例说明.

在图 7 中的迷宫问题中，因为必须从区域 c 经过 j 和 k 到达区域 F，所以路径 ik 必须被排除. 设想有一个闭圈围住了若干区域，如图所示. 只有两条道路进入这一闭圈，即 de 和 ci. 如果希望在总的路线中经过该闭圈中的若干或全部区域，则必须用到这两条道路. 基于这一思路，我们可以较好地解这个迷宫难题而不会得分太少或出错(请读者自行完成.).

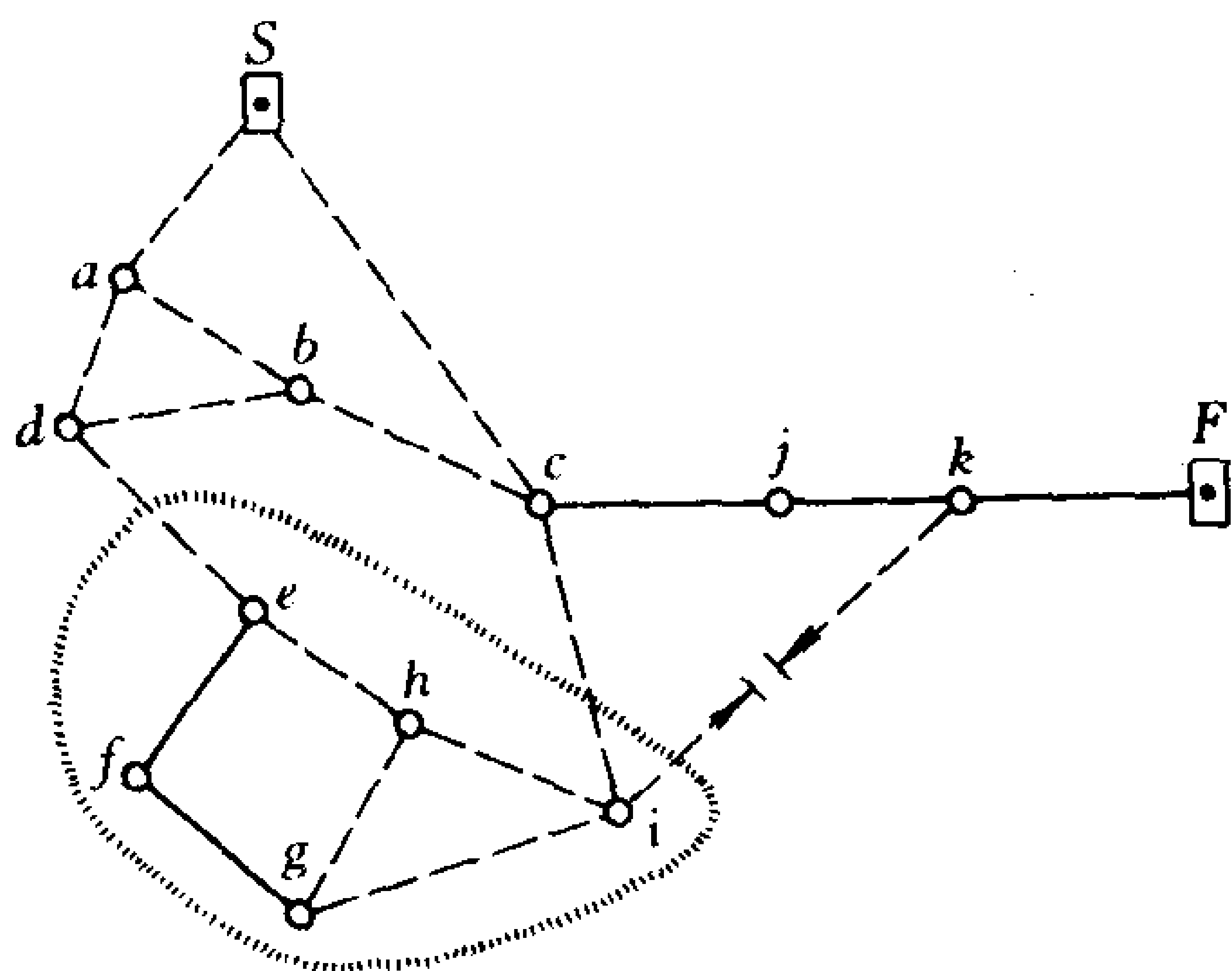


图 7

考虑图 8 中的迷宫问题. 从起点 S 到终点 F 的路线必须

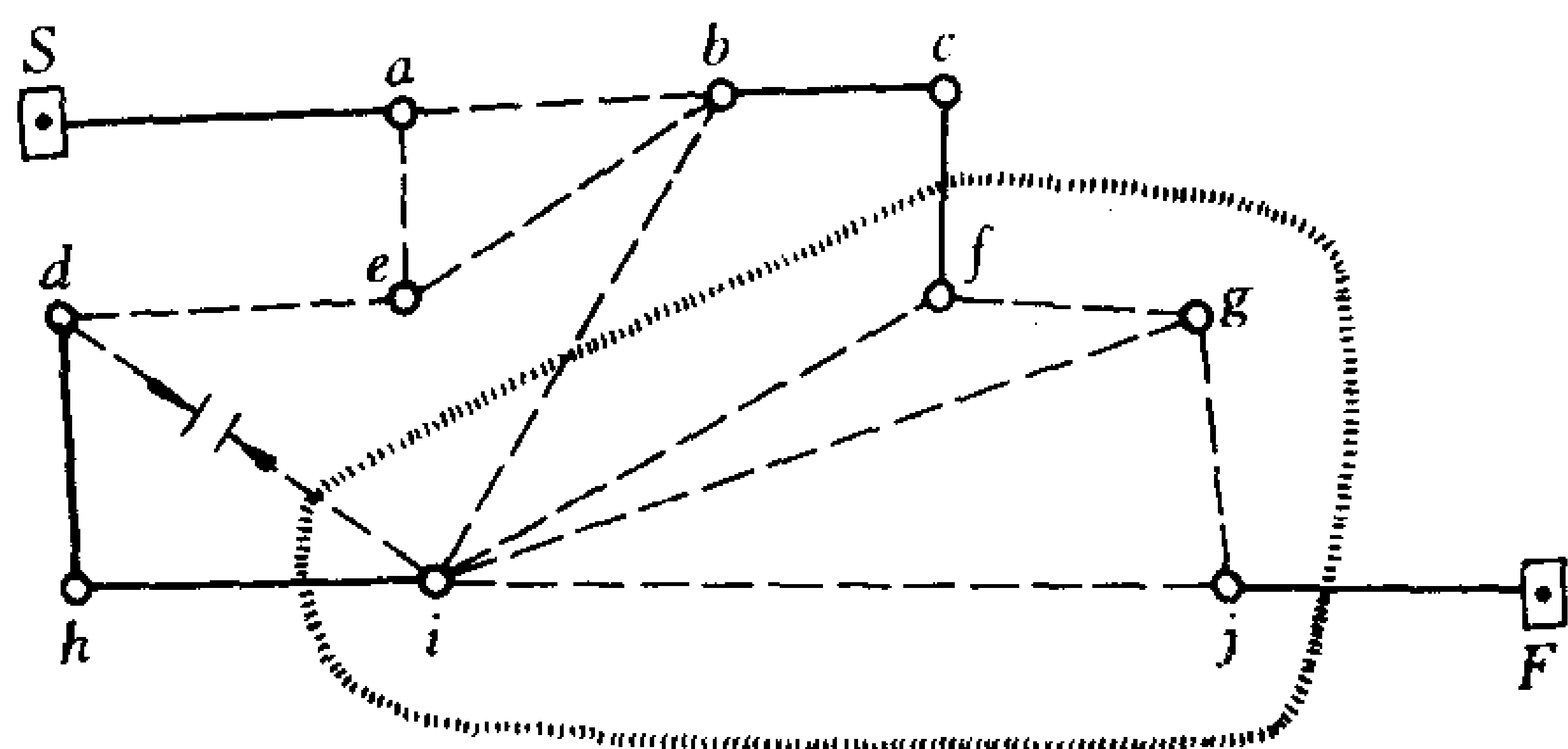


图 8

包含路段 Sa，dh，hi，bc，cf 和 jF. 但是路径 di 必须被排除，否则它将和 dh 及 hi 一起构成一个由实线组成的三角形（想想为什么不行?）. 可以看到，有三条实线即 hi，cf 和 jF 进入图中所示的我们所设想的闭圈. 沿着其中的一条进入闭圈，再沿着另一条离开，然后沿着第三条进入，因此显见必须利用另一条可用的路径 bi 走出这一闭圈. 一般地，如果起点和终点都未被包含在闭圈内，则进入和离开这一闭圈的道路总数应是偶数；如果二者中有且只有一个被包含在闭圈内，则道路总数必为奇数.

这类迷宫问题并不总是只有一个解，即只有一条符合要求的路线使之经过所有的区域. 有些问题可能有多个解，也有些问题可能没有这样的解. 我们在这里介绍的解题方法一定会有助于读者在遇到这类问题（也许形式上会更复杂些）时，

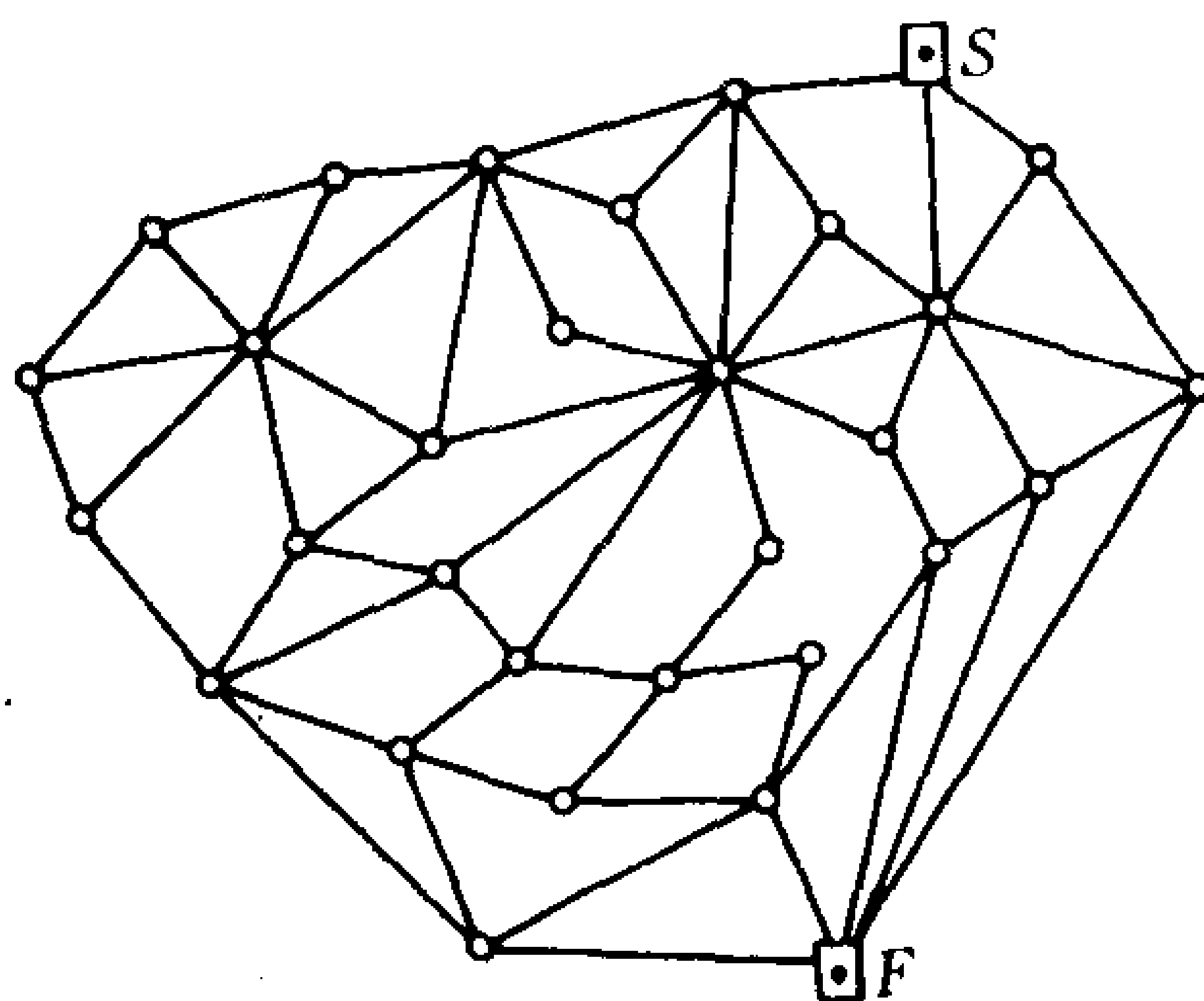


图 9

能迅速地得到最高分. 图 9 中的问题留给读者作为练习.

（刘容光编译，朱学贤校）

参 考 文 献

[1] Leonhard Euler, The seven bridges of Königsberg in vol. I, The World of Mathematics, Simon and Schuster, New York, 1956, p. 573

[2] W. T. Tutte, A non-Hamiltonian graph, *Canad. Math. Bull.*, **3**(1960), 1～5.

图上的一个对策：孤立

R. D. Ringeisen

1. 引言

在讨论对策之前，我们先定义一些有关图论的术语（对于进一步的图论的研究可参见文献[1]～[4]）.

一个图是由一个有限非空顶点集 $V=V(G)$ 与一个指定的称为边集的不同无序相异顶点对的集合 $E(G)$ 组成. 通常画一个图形来表示图，其中用点来表示图的顶点，而用连接点的线段来表示边. 这样在图 1 中 u, v, w, z 和 t 是顶点. uv 在 $E(G)$ 中，而 uw 不在 $E(G)$ 中. 顶点 z 邻接于顶点 u 和 w. 我们将把这样的图形本身看为图.

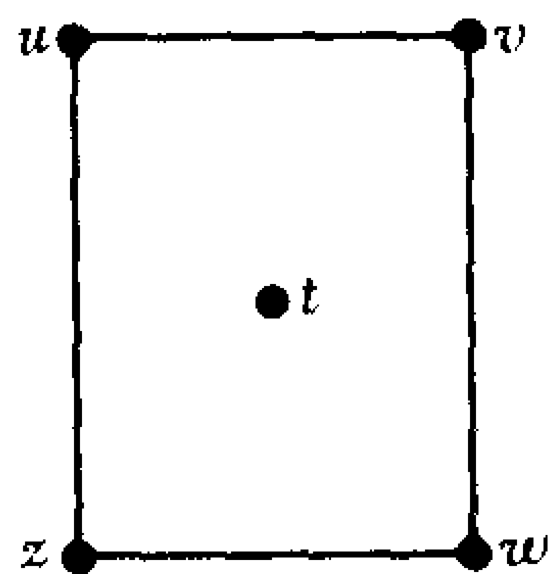


图 1　一个图的图形

如果在一个图中人们能沿着边和顶点从任一个顶点走到另外一个任意的顶点，则称这个图是连通的. 图 1 中的图不是连通的，这是因为人们不能沿图中的顶点和边从 w 走到 t.

一个顶点 v 的次数 $d(v)$ 是遇到 v 的边的数目. 等价地，这也等于与顶点 v 邻接的顶点的数目. 一个孤立顶点是一个

次数为零的顶点. 在具有 n 个顶点的图中任意顶点的最大次数为 $n-1$. 在图 1 中 t 是一个孤立顶点，而所有其他的顶点有次数 2.

在文献[5]中作者定义了转换一个图的运算. 在顶点 v 转换一个图 G 意味着在同样数目的顶点上除去 G 中遇到 v 的所有边，增加从 v 到任一个在 G 中不与 v 邻接的顶点的边，而其他 G 中的边保持不变，来构造一个新图 G'. 在图 2 中我们在顶点 w 转换 G 得到 G'. 然后在顶点 z 转换 G' 得到 G''. 注意从 G' 到 G''的转换产生了一个次数为零的顶点 z. 顶点 z 邻接于 G' 中的所有其他的顶点. 因此，转换除去了所有可能遇到 z 的所有边(w 与 z 有同样的结局，为什么?).

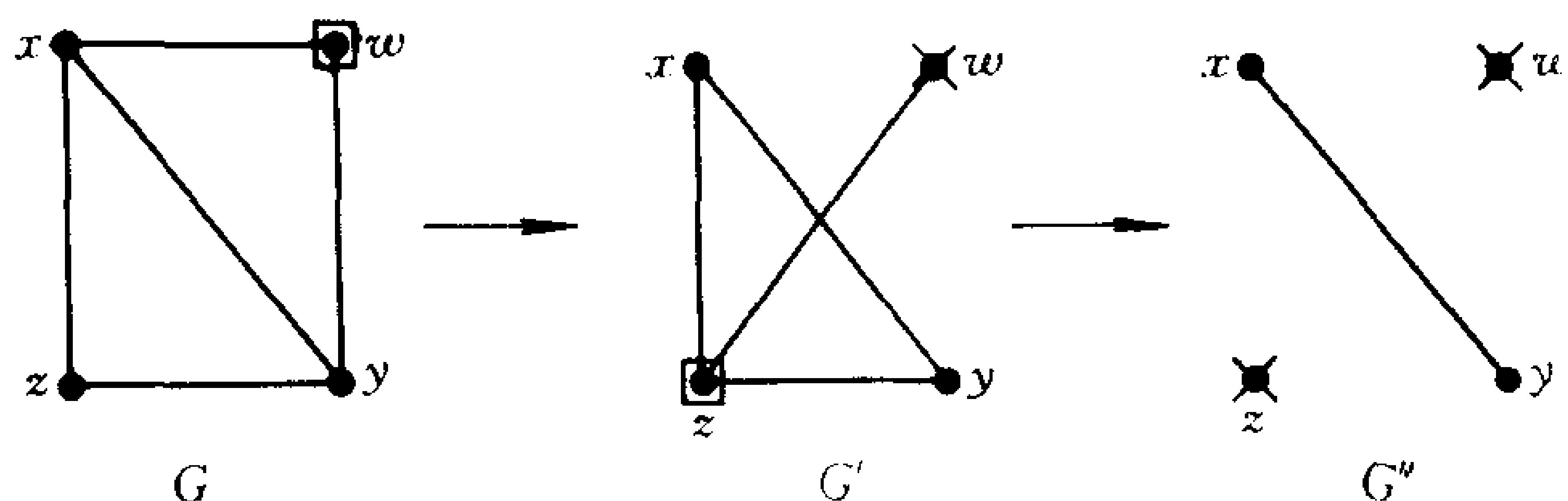


图 2　转换

图相对于一个顶点集的转换定义为在这个顶点集中对每个顶点相继对图进行转换(不难说明转换次序是没有关系的). 在顶点 v 转换一个图使 v 的次数从 $d(v)$变为$(n-1)-d(v)$.

2. 孤立

孤立是一个有两个局中人的对策. 我们称两个局中人分别为 X 和 Y. 进行对策的方法如下：

A. X 和 Y 一致同意进行对策的图有 n 个顶点.

B. 局中人 X 选一个 n 个顶点的连通图 G.

C. 局中人 Y 在 G 中选一个顶点并且在这个顶点转换图 G 为 G'.

D. 局中人 X 在 G' 中选一个 Y 没有选过的顶点并且在这个顶点转换 G'.

局中人按上述方法交替地转换所得的图并且规定一个顶点一旦被用过了,任一个局中人就不能再用了. 第一个在转换中至少得到一个孤立顶点的人在对策中取胜.

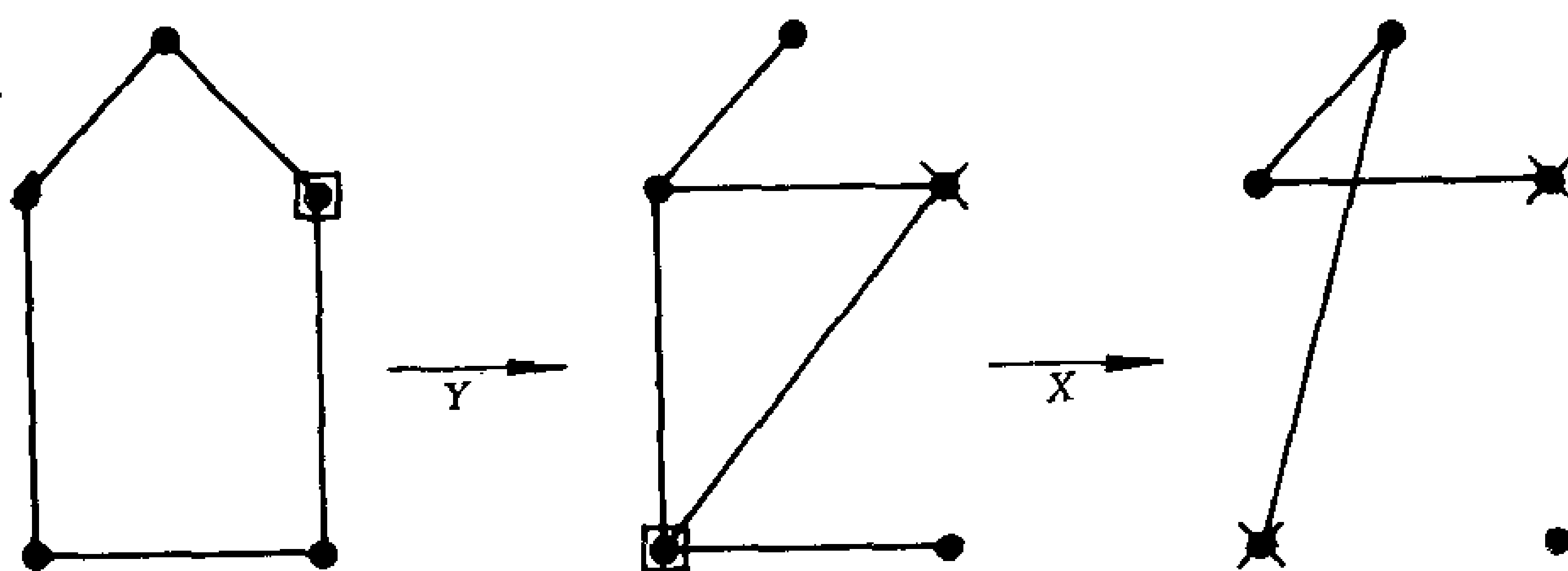


图 3　一个孤立对策

在图 3 所示的孤立对策中,局中人 X 取胜.

方框中的顶点是局中人为了得到下一个图所用的顶点. 画×的顶点是已经用过的顶点.

现在我们来讨论关于孤立的可行性.

3. 转换的一些有关性质

读者很容易自己验证下面的定理.

定理 1　设 $G*H$ 表示图 H 可以从图 G 通过有限个单顶点转换得到,则对所有的 n, $*$ 是关于具有 n 个顶点的图的集合的一个等价关系.

下面的定理说明了孤立的存在性.

定理 2 在任意一个转换等价类中至少存在一个图有一个孤立点.

证明 从给定的等价类 C 中选任一个图 G,如果 G 有一个孤立顶点,结束. 否则,设 v 是 G 的任一个顶点,且设 $v_1, v_2, \cdots, v_{d(v)}$ 是与 v 邻接的顶点,显然相对于集 $\varphi=\{v_1, v_2, \cdots, v_{d(v)}\}$ 的转换使 v 成为一个孤立顶点.

定理 2 似乎说明了可以选任一个连通图来开始孤立对策. 可是定理没有考虑到一个或另一个局中人可以阻止孤立点的产生. 这样,尽管定理从理论上说明了对策的可行性,但它并没有肯定每一个对策是可胜的. 这样我们讨论在孤立中的可胜性.

4. 一些评论和定理

以下总假定 X 是所选图的局中人而 Y 是另一个局中人(他首先进行转换).

定义 如果图中存在一个顶点可用来将图转换为有孤立顶点的图,则局中人将选这个顶点进行转换. 否则,如果存在一个转换使所产生的图不能使对手用来取胜,则局中人将进行这个转换. 我们说这个局中人使用了完美结束对策策略,简称为完美策略. 完美策略也假定 X 将不选一个使 Y 在第一次转换就取胜的图. 如果一个对策中两个局中人都使用了完美策略,则说这个对策是用完美策略进行的.

定义 一个图称为 P 顺利的,如果当用完美策略在图上进行孤立对策时,P 总能取胜($P=X$ 或 Y).

一个图是可胜的,如果用完美策略进行对策时总有一个局中人取胜. 我们把下面定理的证明留给读者.

定理 3 （见图 4）在一个用完美策略进行对策的孤立对策中，设局中人 P 在具有 n 个顶点的图 G 上进行转换. 若 G 有次数为 1 或 $n-1$ 的顶点，则 P 将取胜.

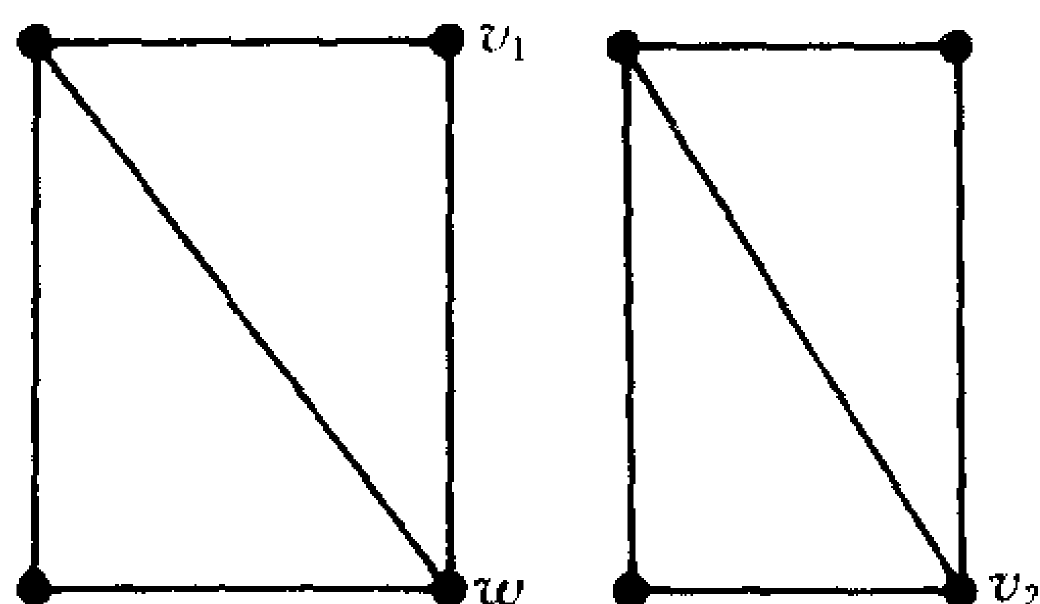


图 4　次数为 1 和 $n-1$ 的顶点

设 K_n 是有 n 个顶点的完全图，即 K_n 中任意两个顶点是邻接的. 设 C_n 是有 n 个顶点的圈图，是一个有 n 个顶点且每个顶点有次数 2 的连通图（见图 5）.

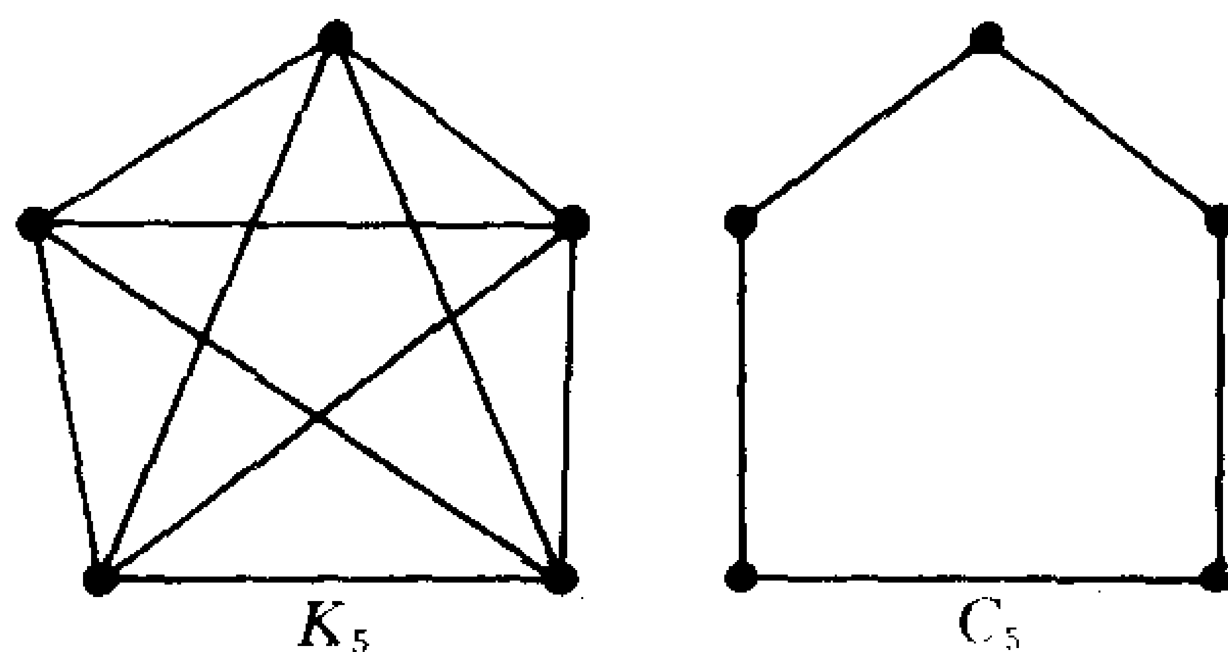


图 5　完全图和圈图

读者能够证明下面定理 3 的推论.

推论 1　K_n 是 Y 顺利的.

推论 2　C_n 是 X 顺利的.

一个局中人可以用定理 3 来决定他的行动. 实际上，定理 3 完全决定了什么时候一个局中人可取胜. 换言之，它告诉局中人找什么和避免给出什么.

定理 4 一个局中人只有当面对一个具有次数为 1 或 $n-1$的顶点的图时，他才可以立刻取胜.

证明 一个顶点 v 通过在它本身或另外一个顶点的转换变成孤立点. 另外一个顶点的转换至多能除去与 v 相遇的一条边. 只有当 v 与所有的其他顶点都邻接时才能用在 v 的转换，使 v 变成孤立点.

我们现在检查是否所有的图都是可胜的. 读者可以自己验证图 6 中的图是不可胜的. 存在具有任意数目的顶点的图是不可胜的吗？在叙述给出上述问题的答案的定理之前，我们定义完全二分图 $K_{m,n}$. 设 V_m 和 V_n 分别是 m 和 n 个不同顶点的集合. 从 V_m 的每一个顶点到 V_n 的每一个顶点连一条边，则形成了图 $K_{m,n}$. V_m 的顶点之间没有边存在，V_n 的顶点之间也没有边存在(见图 6). 设 $\overline{K}_t$ 表示 t 个顶点上没有边的图.

定理 5 设 C 是 n 个顶点上含 $\overline{K}_n$ 的转换等价类，则 $\overline{K}_n$ 是 C 中仅有的不连通图. 进而，C 中任一不是 $\overline{K}_n$ 的图是一个完全二分图.

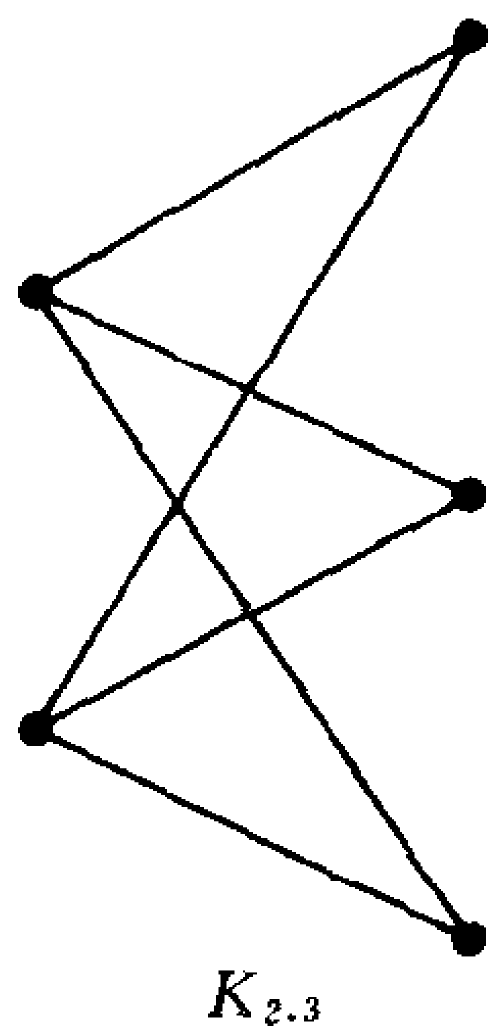


图 6 完全二分图

证明 显然，可以选等价类中的任一元并且通过相对于这个元的顶点集的每一个子集的转换来得到一个等价类中的所有元. 我们选 $\overline{K}_n$. 在每个顶点转换 $\overline{K}_n$ 得到一个完全二分图 $K_{1,n-1}$.

当在一个顶点(不是 $K_{1,n-1}$中次数为 $n-1$ 的顶点)转换一个二分图时，产生另一个完全二分图. 为了看到这一点，设 v 是图 $K_{p,n-p}$中 V_p 的一个顶点，$p\neq1$. v 的转换产生图 $K_{p-1,n-p+1}$，这是因为转换后 v 不邻接于 V_{n-p}中的顶点而邻接于 V_p 中的每一个顶点.

因为相对于一个集的转换是一系列相对于顶点的转换，定理得证.

定理 5 可以用来说明对任意的 $n\geqslant 5$，存在具有 n 个顶点的图是不可胜的.

定理 6 对每个整数 $n\geqslant 5$，$K_{p,n-p}(2\leqslant p\leqslant n-2)$是不可胜的图.

证明 由定理 5，在含 $\overline{K}_n$ 的变换等价类中只有 $\overline{K}_n$ 是有孤立顶点的图. 我们注意为了从任一个完全二分图转换到 $\overline{K}_n$，必须首先得到 $K_{1,n-1}$. 类似地在得到 $K_{1,n-1}$ 前必须得到 $K_{2,n-2}$. 因此，无论什么时候如果一个局中人面对 $K_{2,n-2}$，他能够避免转换到 $K_{1,n-1}$. 对策将永远不能被取胜. 我们给出下面的论断.

论断 在用完美策略进行孤立对策的过程中，如果一个局中人面对 $K_{2,n-2}$，则或者所有的顶点都被用过了，或者 V_{n-2} 中至少存在一个没有用过的顶点.

论断的证明 假定 V_{n-2}中所有的顶点都用过了，则在原来的对策图中 V_{n-2}中的任意两个顶点都不邻接(相对于两个或多个顶点集的转换保留不变顶点集的顶点之间的邻接性). 这样，由定理 5，原来的图或者是 $K_{n-2,2}$或者是 $K_{n-1,1}$. 假定用完美策略进行对策时避免了 $K_{n-1,1}$. 如果用 $n-2$ 个次数为 2 的顶点中的每一个来转换 $K_{n-2,2}$，同时不用次数为 $n-2$ 的任一顶点进行转换，将得到 $\overline{K}_n$，与假设矛盾. 这样在局中人面对的图 $K_{2,n-2}$中至少有一个次数为 $n-2$ 的顶点被用过.

假设 V_2 中恰好有一个顶点 v 被用过，那么在原来的图中 v 不与 V_{n-2}中的顶点邻接且邻接于 V_2 中的另外一个顶点. 因此原来的图是 $K_{n-1,1}$，这与用完美策略进行对策矛盾.

因此在面对局中人的 $K_{n-2,2}$中，所有的顶点都被用过了.

这就证明了论断.

由论断，当 $K_{2,n-2}$出现时或者所有的顶点都被用过了，对策结束，或者局中人可以选 $n-2$ 个次数为 2 的顶点中的一个使所产生的图避开 $K_{1,n-1}$，这样对策是不可胜的.

一个有趣的没有解决的问题是给出不可胜图的特征. 定理 6 中所描述的图是仅有的不可胜图吗？在这里我们不进一步研究这个问题. 在下一节我们将引进一个新的进行孤立对策的方法.

5. 对策和矩阵

在文献[5]中作者引进并利用了下面的邻接矩阵(它不同于文献[1]～[4]中的邻接矩阵). 设 G 是一个图且设它的顶点被标号为 $1,2,\cdots,n$. G 的+，一邻接矩阵定义为：

$$(A)_{i,j}=\begin{cases}-1, & \text{若 } i \text{ 和 } j \text{ 是邻接的；}\\ +1, & \text{若 } i \text{ 和 } j \text{ 是不邻接的；}\\ 0, & \text{若 } i=j.\end{cases}$$

当在点 i 转换一个具有邻接矩阵 A 的图时，新图的邻接矩阵 A'能够通过用-1 乘 A 的第 i 行和第 i 列得到，等价地，我们能通过用第 i 行，第 i 列元素为-1，其他元素为 1 的对角矩阵前乘和后乘 A 得到. 相对于集 φ 的转换能通过用对应于 φ 的元的元素为-1，其他元素为 1 的对角矩阵前乘和后乘 A 得到. 文献[5]中的作者用了特征值和其他的矩阵性质来分析转换运算. 读者也许会发现先考查 $K_{m,n}$的邻接矩阵，然后用矩阵乘法来证明定理 5 是有益的.

我们这里谈到的矩阵仅仅是使那些愿意使用矩阵乘法而不愿意使用转换的读者知道这种方法. 我们希望读者做一些矩阵的转换.

6. 结论

转换运算是有趣的且本身有许多没有解决的问题. 在这里我们只是集中讨论了它在对策上的应用. 希望读者能对孤立做进一步的研究.

（刘桂真编译）

参 考 文 献

[1] R. G. Busacker and T. L. Saaty, Finite Graphs and Networks: An Introduction with Applications, McGraw-Hill, New York, 1965.

[2] F. Harary, Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, 1969.

[3] O. Ore, Graphs and Their Uses, Random House, New York, 1963.

[4] ——, Theory of Graphs, *Amer. Math. Soc. Colloq. Publications*, Vol. **38**, 1962.

[5] J. H. Van Lint and J. J. Seidel, Equilateral point sets in elliptic geometry, *Kon Ned. Akad. Wetensch. Amst. Proc.*, A**69**(1966), 335~348 (=Indag. Math., **28**(1966), 335~348.).

平面图形和它的相关图中的树与欧拉环游

Mark E. Kidwell 和 R. Bruce Richter

1. 引言

设 G 是嵌入平面的一个图①,同时描绘出 G 的两个相关图:它的对偶和它的中图②.我们的目的是说明 G 的支撑树的数目、对偶的支撑树的数目、中图的有向欧拉环游的数目和中图的树形图的数目都相同.这些结果虽然已经知道,但在原来的文献中不都是容易理解的.这些证明尽管不是平凡的,但应该被大多数高年级的大学生所理解——确实,这些证明也许会使人们对平面图产生兴趣.

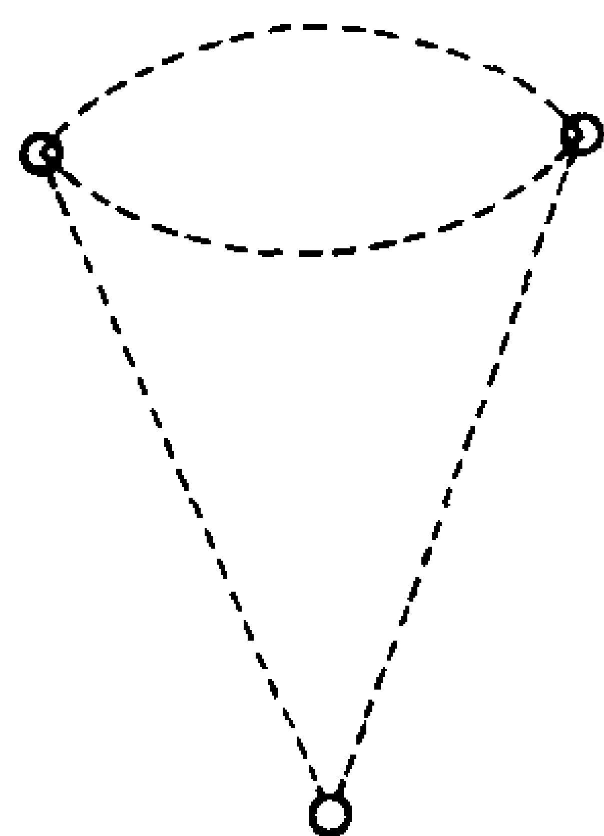


图 1

在本文中,一个图可以有环和重边.这种图在某些文献中有时称为"多重图".我们所用的术语主要依据文献[6],它是一本极好的图论的教科书.

一个图 G 的支撑树是 G 的一个没有圈且含 G 的所有顶点的连通子图.例如,若 G 是图 1 中的图,则 G 的五个支撑树如图 2 所示.

---

① 本文中用到的有关图论的一些基本概念见本文的附录:"图的支撑树和欧拉环游".——译者注

② 它们的定义将在下面给出.——译者注

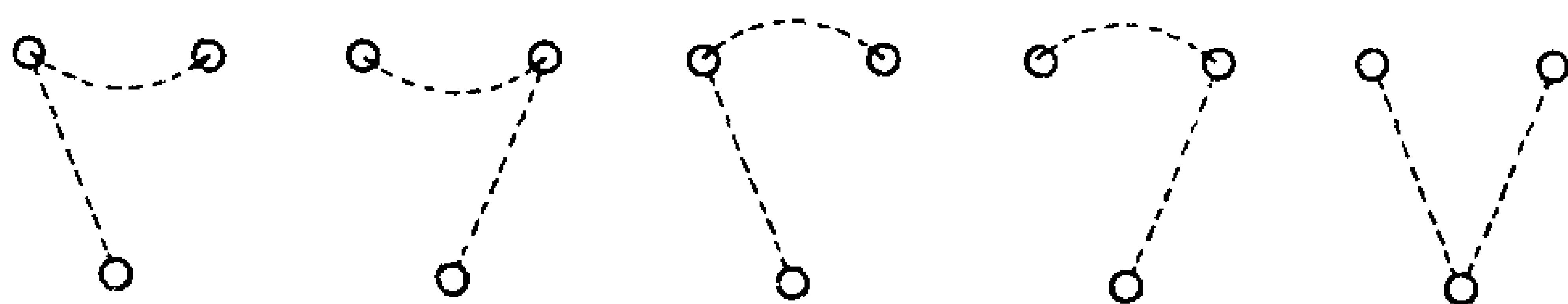


图 2

现在从图 1 中 G 在平面上的一个画法我们能够构造 G 的对偶图 $D(G)$. 为了得到 $D(G)$，在 G 的每个面上画一个顶点，并且对于 G 的每条边 e 画 $D(G)$的一条边 $\tau(e)$，使 $\tau(e)$是连接 $D(G)$中的位于 e 所对的两个面中的顶点的连线. 这个过程如图 3 所示——原图 G 用短划虚线给出，而对偶图 $D(G)$用长划虚线给出. 注意：如果我们画 $D(G)$的边 $\tau(e)$使它与 e 相交一次且不与 G 的其他的边相交，则 $D(G)$成为一个平面图. 映射 τ 给出了 G 和 $D(G)$之间的一个自然的双射. $D(G)$的每个面恰好含 G 的一个顶点，这样 $D(D(G))=G$. 我们指出 $D(G)$依赖于 G 的特殊画法. 存在一些已知的条件来决定什么时候 G 只有一个对偶图[7]，但这里我们将不再继续讨论.

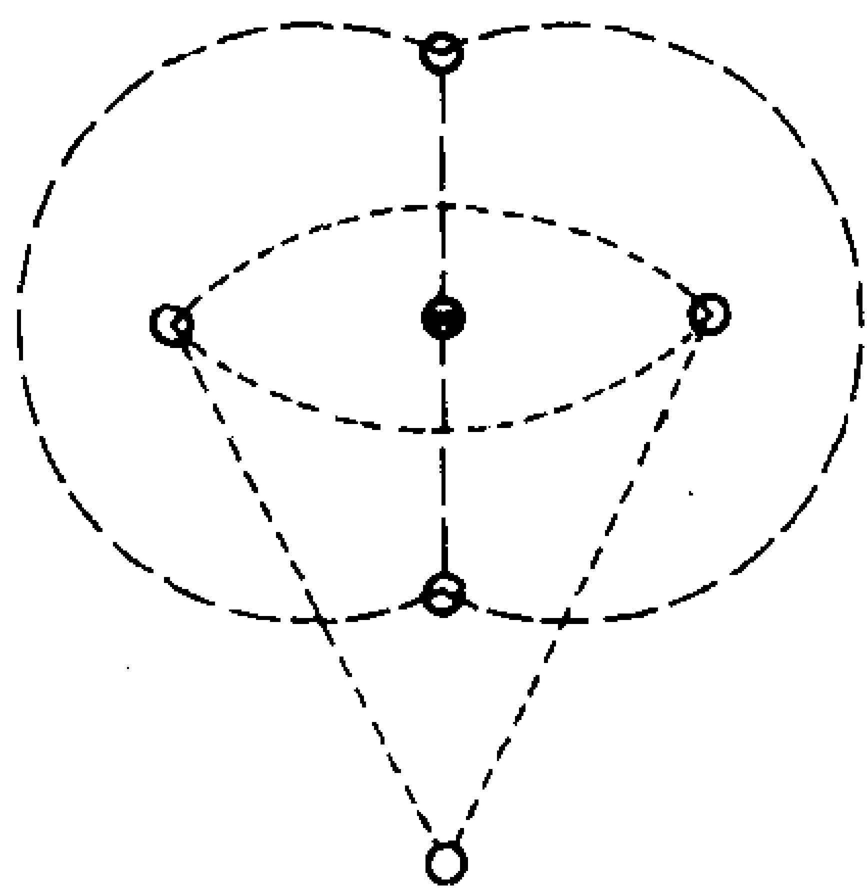


图 3

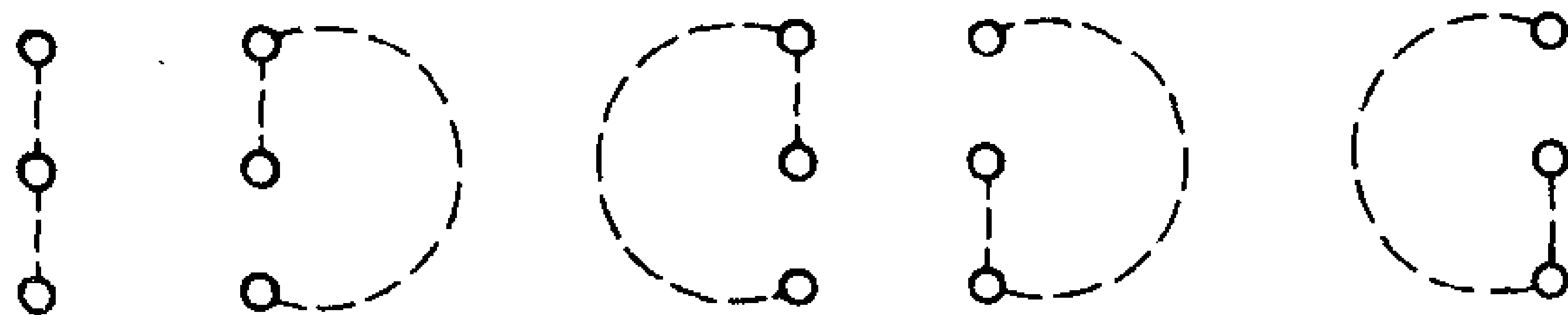


图 4

在图 4 中我们列出了 $D(G)$的支撑树. G 的支撑树的数

目恰好等于 $D(G)$的支撑树的数目.这是巧合吗?读者或许喜欢让自己确信同样的事情会对图 5 中的图 G'和它们对偶图也发生.的确 G'和它的对偶都有 11 个支撑树.

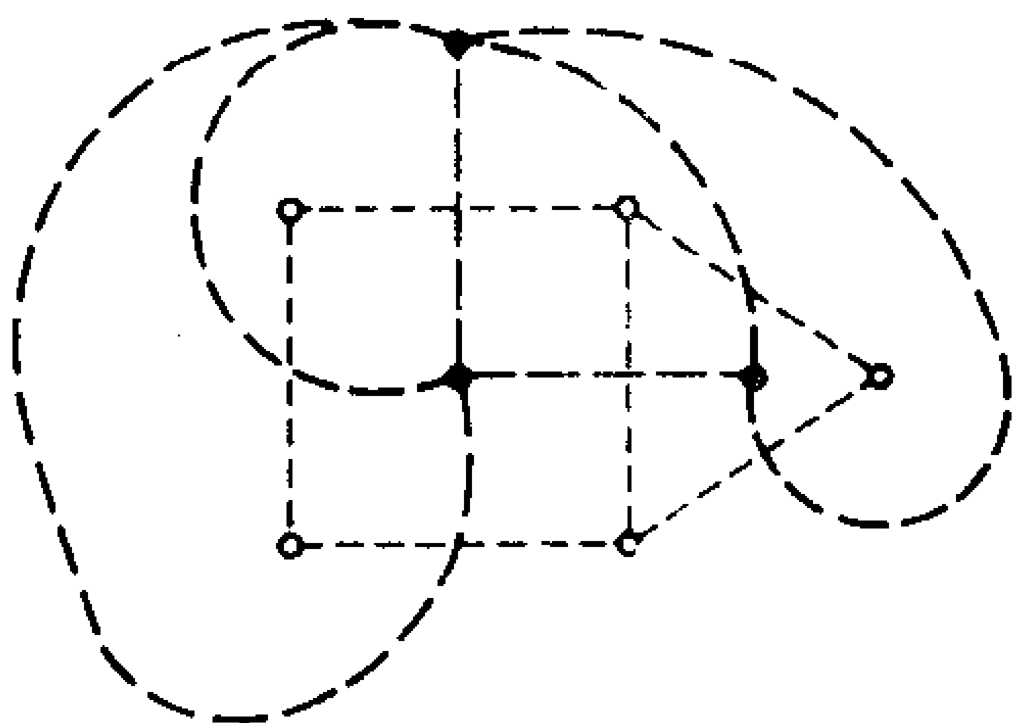


图 5

在第 2 节中我们将看到,如果 G 是任一个平面图,则 G 和它的对偶图有同样数目的支撑树.对于一个平面图 G,存在另一个可由 G 构造的图——G 的中图 $M(G)$,它是通过在 G 的每条边的中间插入一个点,作为它的顶点得到.它的边是这样确定的:对 $M(G)$的每一对分别从边 e 与 e'得到的顶点 v 与 v'和 G 的每一个有 e 和 e'在其边界上为相继边的面 F,我们在 F 中画 $M(G)$的一条连接 v 与 v'的边.这样 v 和 v'将有以 e 和 e'为相继边的面数那么多边连接它们.见图 6(a),这里中图是从图 1 中的图 G 构造的.这里 G 是虚线图而 $M(G)$是实线图.读者也许希望重新肯定 $M(G)$与 G 没有相同数目的支撑树.注意:$M(G)$是一个平面图,对应 G 的每条边它有一个顶点,且 $M(G)$的每个顶点与 $M(G)$的 4 条边关联.中图与 G 的线图 $L(G)$有关但不相同(参见[3,p.71]).若 G 没有次数为 1 或 2 的顶点,则 $M(G)$是 $L(G)$的子图.可是 $M(G)$总是 4-正则的,而 $L(G)$通常有较大次数的顶点.像对偶图一样,中图也依赖于在平面上 G 的特殊画法.若 G 是连通的,则

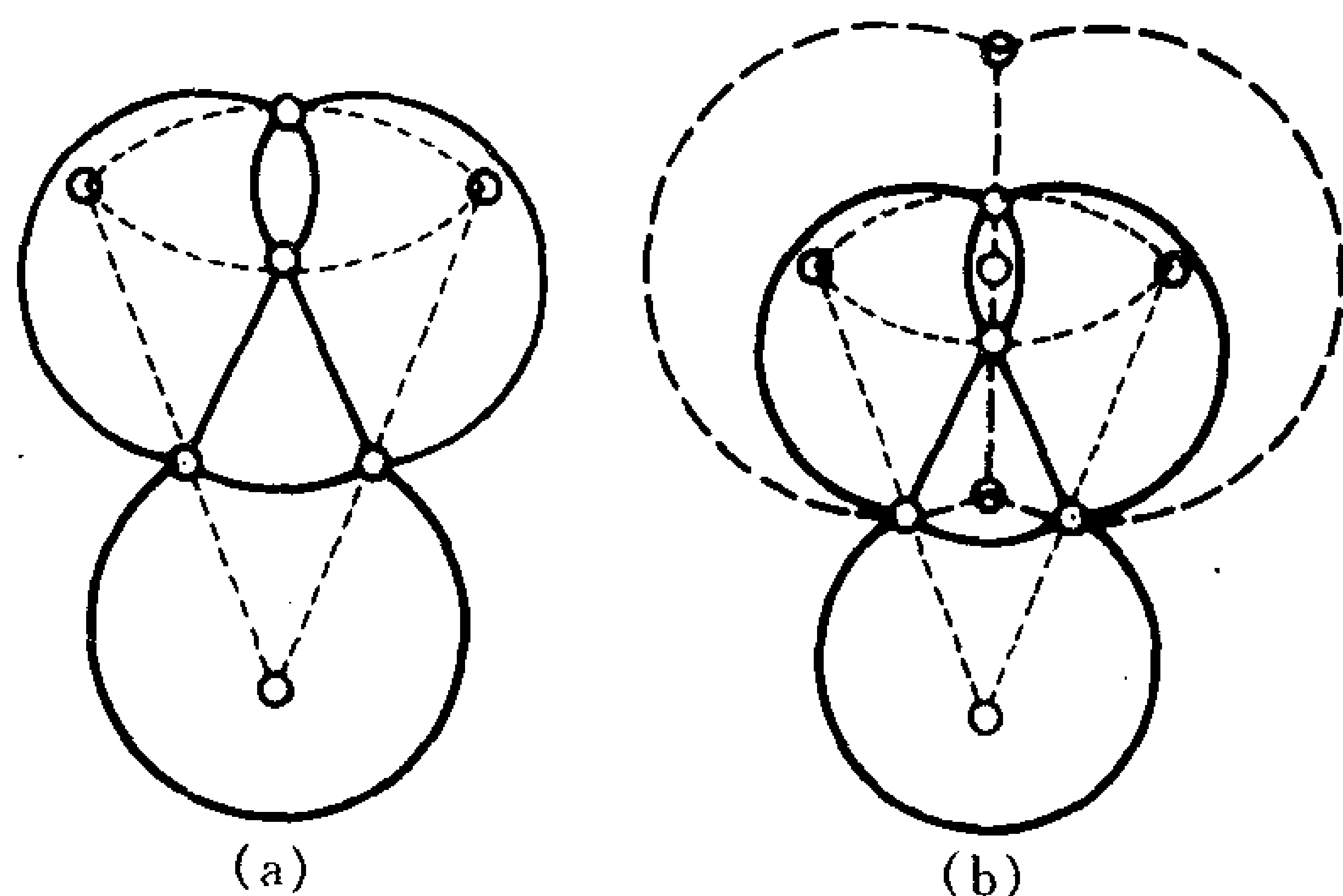


图 6

$M(G)$也是连通的.

注意,我们能够在$D(G)$的每条边$\tau(e)$与e的相交处插入一个顶点,用$D(G)$来构造$M(G)$,即$M(G)=M(D(G))$.在图6(b)中我们说明了这一点.一般结果的证明将留给读者(见[5]).图6(b)中G是短划虚线图,$D(G)$是长划虚线图,$M(G)$是实线图.

现在我们开始给$M(G)$的边定向使它是平衡的,即指向一个顶点的边数等于背向它的边数.在一个连通图中这个条件等价于存在一个有向欧拉环游.读者也许会猜想在$M(G)$中有向欧拉环游的数目等于G的支撑树的数目(因此等于$D(G)$的支撑树的数目).我们将在第3节中说明这种关系.

注意$M(G)$的每个面含G的或$D(G)$的一个顶点,但不同时含它们.有4个面围绕着$M(G)$的每个顶点.如果我们依次穿过这些面,它们将交错地含G的一个顶点和$D(G)$的一个顶点.为了用另外的方法表示这一点,如果我们将$M(G)$的含G的顶点的面染成黑色(以B表示)而将$M(G)$的含$D(G)$

的顶点的面染成白色(以 W 表示),则 $M(G)$ 的每一条边分离一个白面和一个黑面. 这样 G 的(或 $D(G)$ 的)一条边穿过 $M(G)$ 的一个顶点到对角面.

固定刚才所描述的 $M(G)$ 的黑面和白面. 现在给 $M(G)$ 的所有的边定向使当我们绕着黑面的边界按顺时针方向走时,每条边的方向都指向旅行者. 见图 7. 这样当一个昆虫沿着一条边按边的方向爬行时将总有一个白色区域在它的左边而一个黑色区域在它的右边.

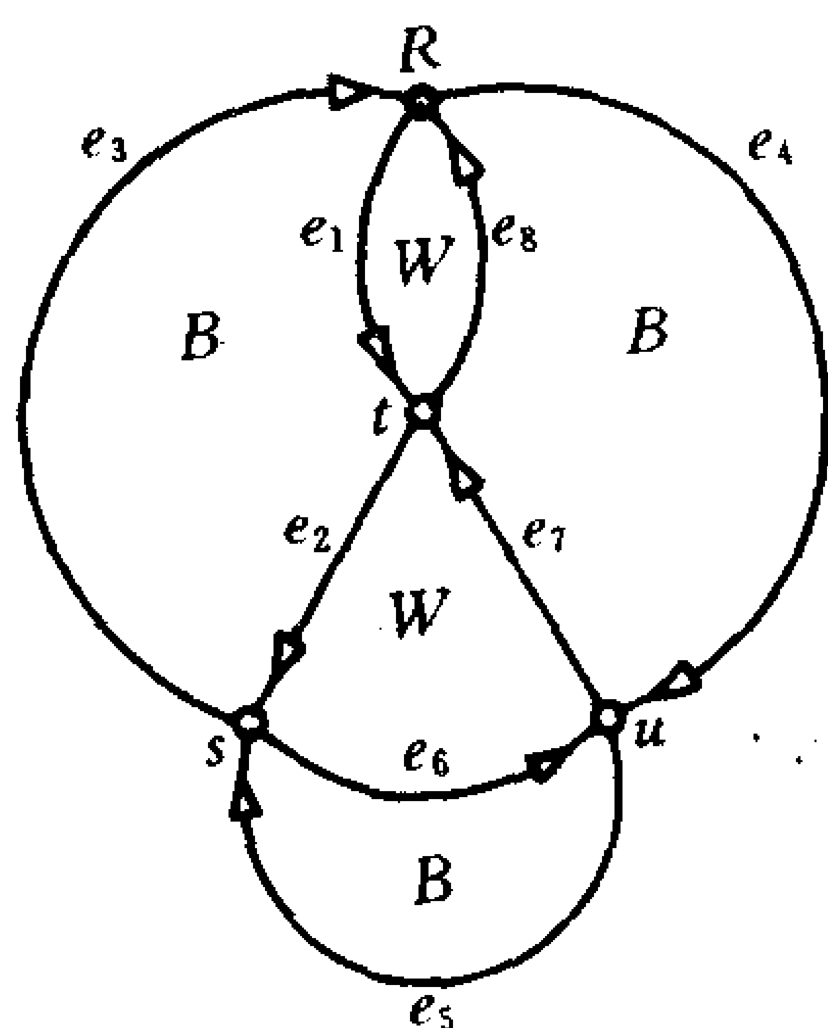


图 7

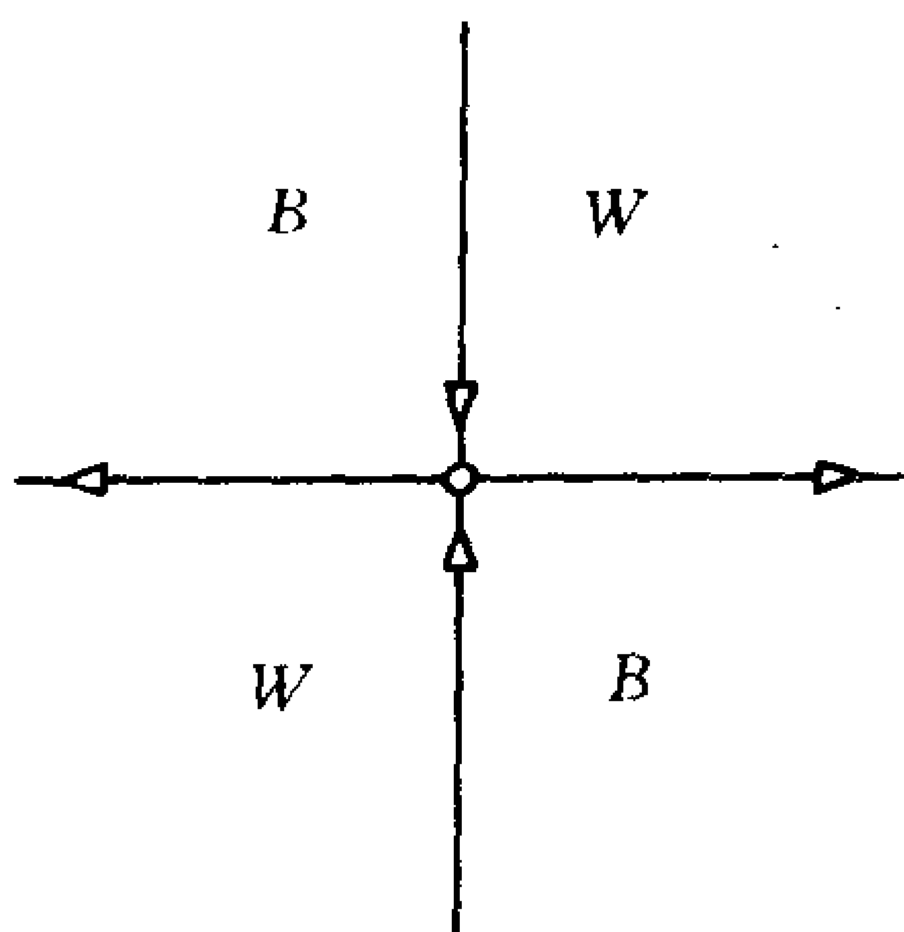


图 8

读者应该看出在 $M(G)$ 的每一个顶点处有向边交错地进入和离开这个顶点——见图 8. 因为有两条边进入且有两条边离开每个顶点,$M(G)$ 中存在一个有向欧拉环游. 这是一条沿 $M(G)$ 的途径,它在同一个顶点开始和结束,沿着与边的定向相同的方向穿过每条边恰好一次. 序列($R, e_1, t, e_2, s, e_6, u, e_5, s, e_3, R, e_4, u, e_7, e_8, R$)是图 7 中所示的 $M(G)$ 中这样一个环游的例子. 为了对有向欧拉环游有一个标准的表示,我们将指定环游开始的点 R 和必定指向 R 的环游的最后一条边. 在

图 7 的例子中我们指定 e_8 是“最后的边”.

对于 $M(G)$ 我们所考虑的环游是 (R, t, s, u, R, u, t, R)，$(R, t, s, R, u, s, u, t, R)$，$(R, u, t, s, u, s, R, t, R)$，$(R, u, s, R, t, s, u, t, R)$ 和 $(R, u, s, u, t, s, R, t, R)$（因为在上述情况不致引起混淆，我们省去了序列中的边. 一般地，也许存在两条边从一个点指向另一个点. 在这种情况下知道依什么样的次序通过这些边是重要的.）.

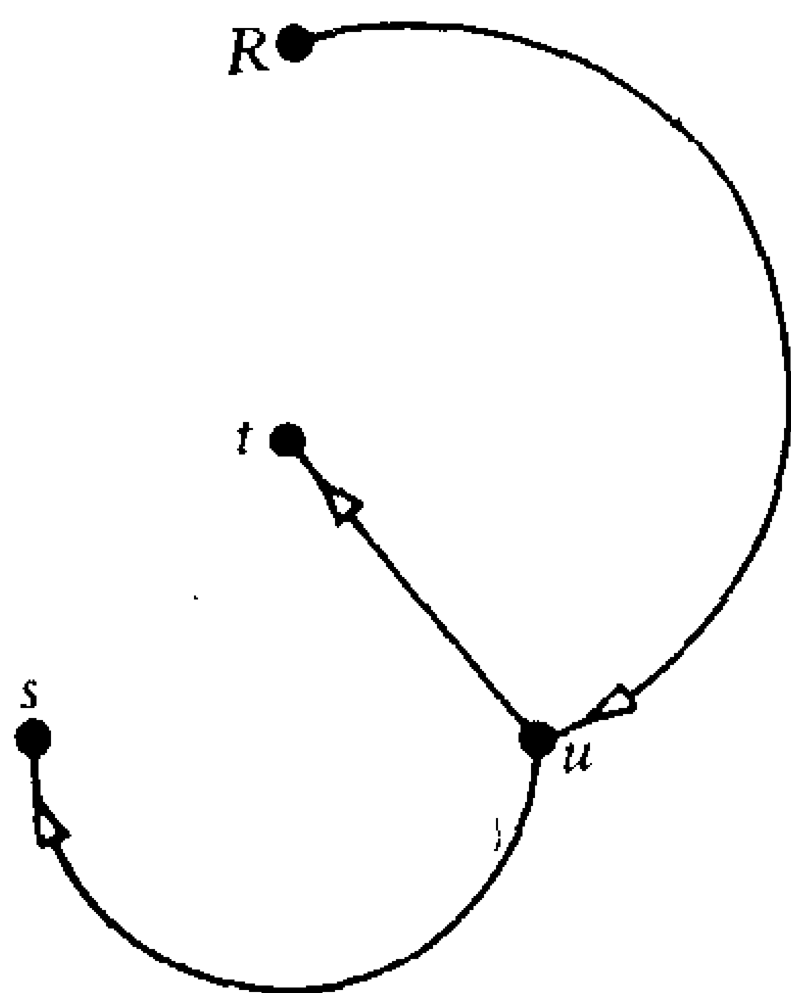


图 9

不管你是否相信上述事实，我们必须结束了. $M(G)$ 的一个根在 R 的树形图是 $M(G)$ 的一个支撑树 A，使对每一个不同于 R 的顶点恰好存在 A 的一条边指向它，同时没有 A 的边指向 R. 因为我们能够把这看作从树的基（根）到叶子的（有向）水流，所以植物学上的形象地描绘是合适的. 在图 9 中给出了树形图的一个例子. 我们鼓励读者验证 $M(G)$ 的根在 R 的树形图的数目是 5. 这是一个与 G 的支撑树的数目相同的数. 在第 4 节中我们将说明 $M(G)$ 的根在 R 的树形图的数目等于它的有向欧拉环游的数目.

2. 在对偶图中的支撑树

在这一节我们将看到平面图 G 的支撑树怎样相关于它的对偶 $D(G)$ 的支撑树. 考虑图 10 中用短划虚线所示的树 T. $D(G)$ 中对应于不在 T 中的长划边形成 $D(G)$ 的一个支撑树. 我们的目的是证明上述事实对一般情况也成立.

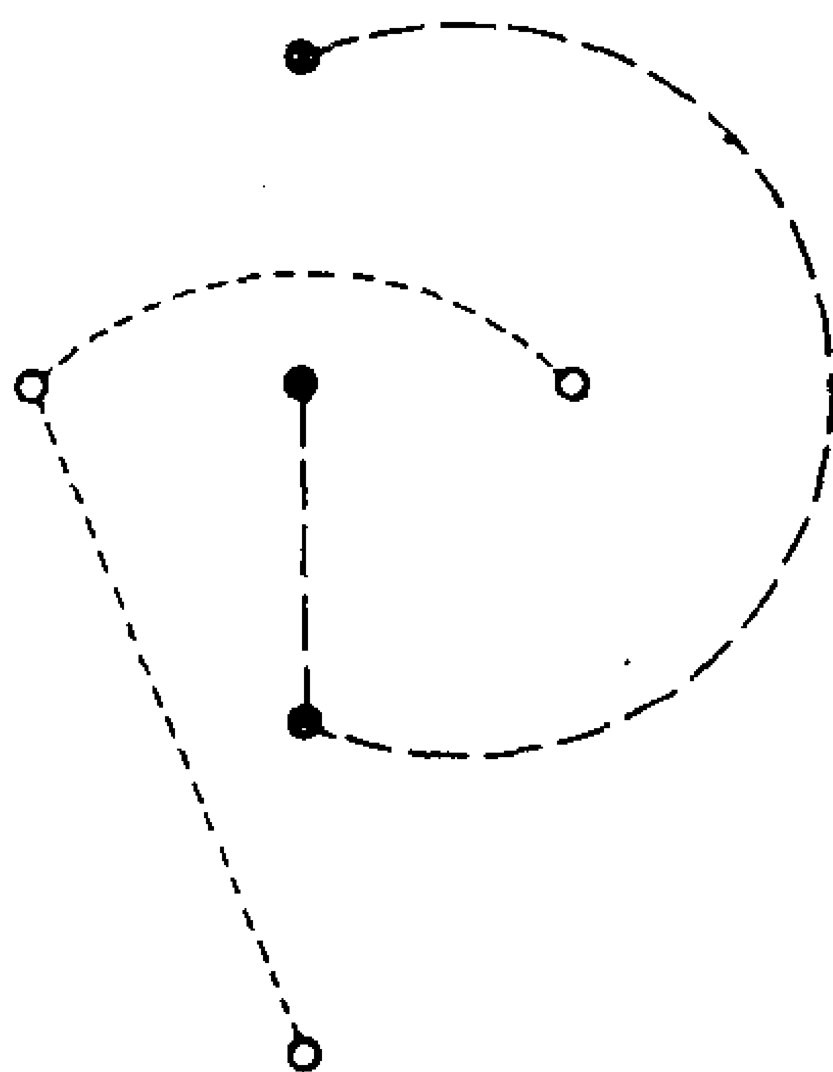


图 10

前面我们引进了从 G 的边到 $D(G)$ 的边的映射 $\tau: E(G) \to E(D(G))$. 我们能扩展这个映射为关于边子集的映射，使对 $E(G)$ 的任意子集 E' 有 $\tau(E') = \{\tau(e) \mid e \in E'\}$. 同样地，对 $E(G)$ 的子集 E' 能得到一个补映射 $\tau^*(E') = \{\tau(e) \mid e \notin E'\}$. 显然，对 $E(G)$ 的任意子集 E' 有 $\tau(E') \cup \tau^*(E') = E(D(G))$.

定理 1 设 T 是 G 的一个支撑树且设 $\tau^*(T)$ 是 $D(G)$ 的含 $D(G)$ 中对应于 G 不在 T 中的边的子图. 则 $\tau^*(T)$ 是 $D(G)$ 的一个支撑树.

证明 若 $\tau^*(T)$ 含圈 p，则 G 的某个顶点 v 在 p 内部，而另一个顶点 w 在 p 的外部. 由约当曲线定理，T 中连接 v 与

w 的路与 p 相交，这与 $\tau^*(T)$ 的定义矛盾.

现在设 v 和 w 是 $D(G)$ 的任意顶点. T 中不存在圈，于是，我们消去 T 的边后，v 和 w 在平面上仍然是连通的. 这样我们能在平面上找到一条不含 T 的边的多角曲线连接 v 和 w. 假设这条曲线通过 G 的面 $F_1,\cdots,F_k$. 对 $j=2,3,\cdots,k$，设 $\tau(e_j)$ 是 $D(G)$ 的连接 $D(G)$ 的在面 F_{j-1} 和面 F_j 中的顶点的边. 这些边含一条 $D(G)$ 中连接 v 和 w 的路——显然这些边在 $\tau^*(T)$ 中. 这样，$\tau^*(T)$ 是连通的且含 $D(G)$ 的所有顶点.

从 G 的支撑树的集合到 $D(G)$ 的支撑树的集合的映射 τ^* 显然是一个内射. 因此 G 的支撑树的数目小于等于 $D(G)$ 的支撑树的数目. 由 $D(D(G))=G$ 知上述不等式中的等式成立.

G 和 $D(G)$ 的支撑树间的对应很早以前就知道了. 这个结果是文献[1]中的一个练习.

3. 中图中的欧拉环游

在这一节中我们描述 G 的支撑树怎样对应于中图 $M(G)$ 中的欧拉环游. 设 E 是 $M(G)$ 的有向欧拉环游. 在 $M(G)$ 的每一个顶点，E 沿着邻接的边进入并离开这个顶点. 在 $M(G)$ 的每个顶点轻轻地分离由 E 决定的边. 在图 7 中我们有具有有向欧拉环游 (R,t,s,u,s,R,u,t,R) 的中图 $M(G)$. 图 11 是根据 E 分离 $M(G)$ 的每个顶点所得的结果.

在每个顶点的这种分离产生了自身不相交的闭曲线 C. 这样，约当曲线定理得到了应用. 显然，黑面将都在曲线的右边(当我们按边的方向旅行)且白面将都在曲线的左边. 像前面所安排的，黑面是含 G 的顶点的那些面而白面是含 $D(G)$ 的顶点的那些面. 设 T 是 G 的含 G 的不与 C 相交的那些边

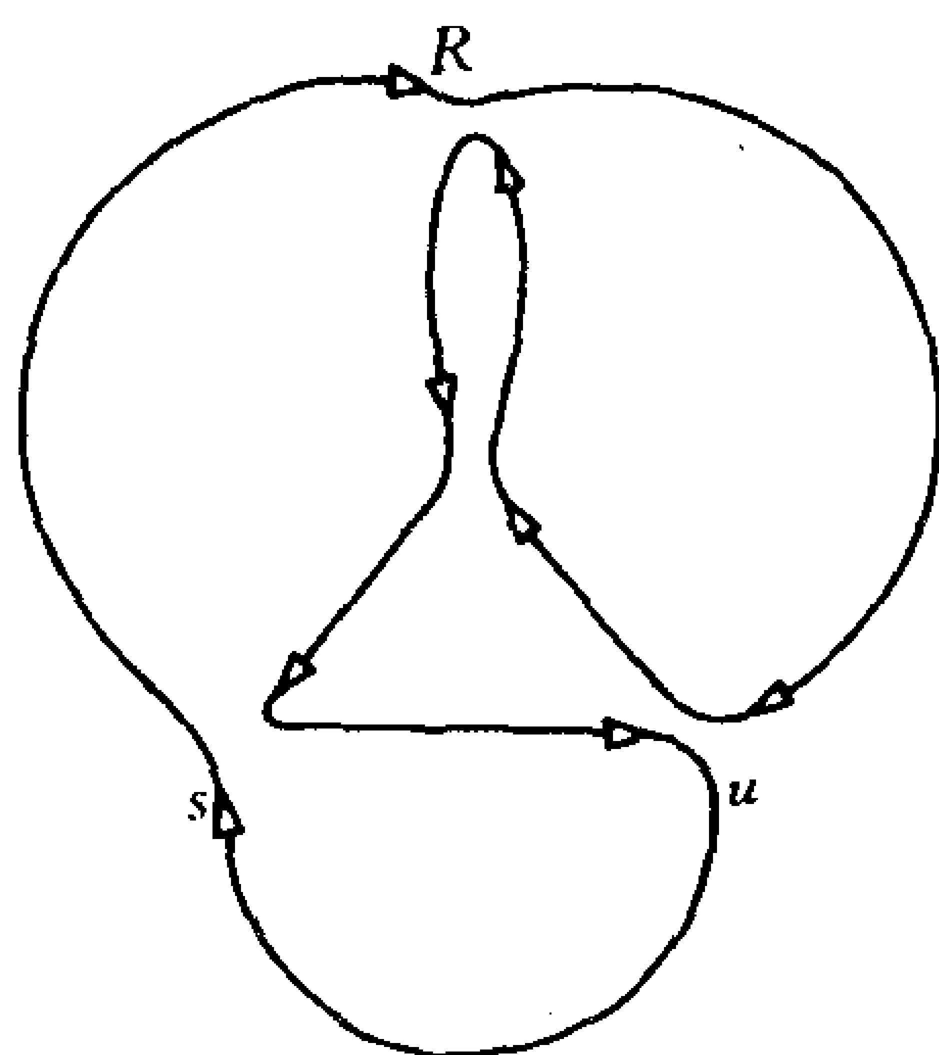


图 11

的子图且设 $\tau^*(T)$是 $D(G)$的含与不在 T 的边所对应的那些边的子图. 注意 $\tau^*(T)$是由 $D(G)$的不与 C 相交的边构成. 在图 12 中虚线边所构成的图为 T.

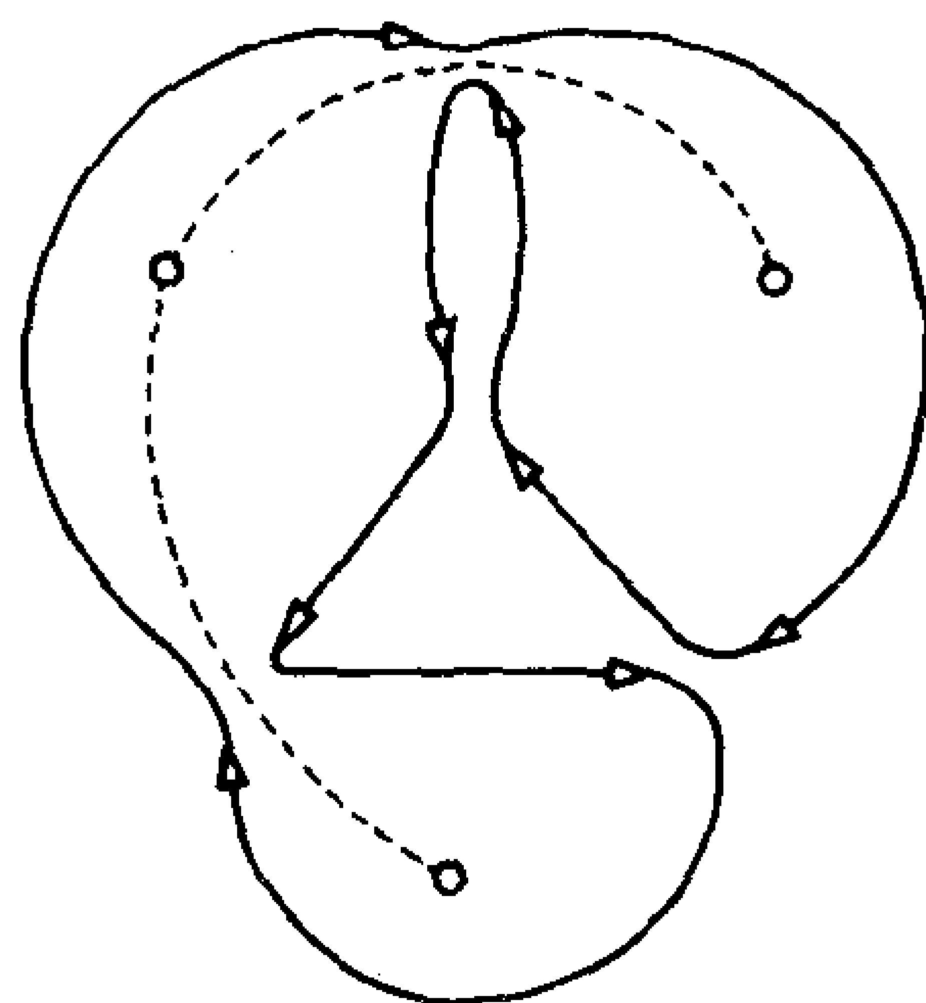


图 12

我们断言 T 是 G 的遇到 G 的每个顶点的连通子图. 如同在定理 1 的证明中的论证,从 C 的黑面开始我们能够从 G 的任意顶点到 G 的另一个任意顶点. 类似地,$\tau^*(T)$是 $D(G)$的

含 $D(G)$ 的每个顶点的连通子图. 由定理 1, T 和 $\tau^*(T)$ 必定分别是 G 和 $D(G)$ 的支撑树. 这样, $M(G)$ 的每一个有向欧拉环游产生了 G 的一个支撑树.

反之,假设 T 是 G 的一个支撑树,为了产生 $M(G)$ 的一个有向欧拉环游,我们根据 T 分离 $M(G)$ 的顶点: 若 G 的边 e 在 T 中,则如图 13(a)分离 $M(G)$ 的对应顶点,而如果 e' 不在 T 中,则如图 13(b)所示分离 $M(G)$ 的顶点.

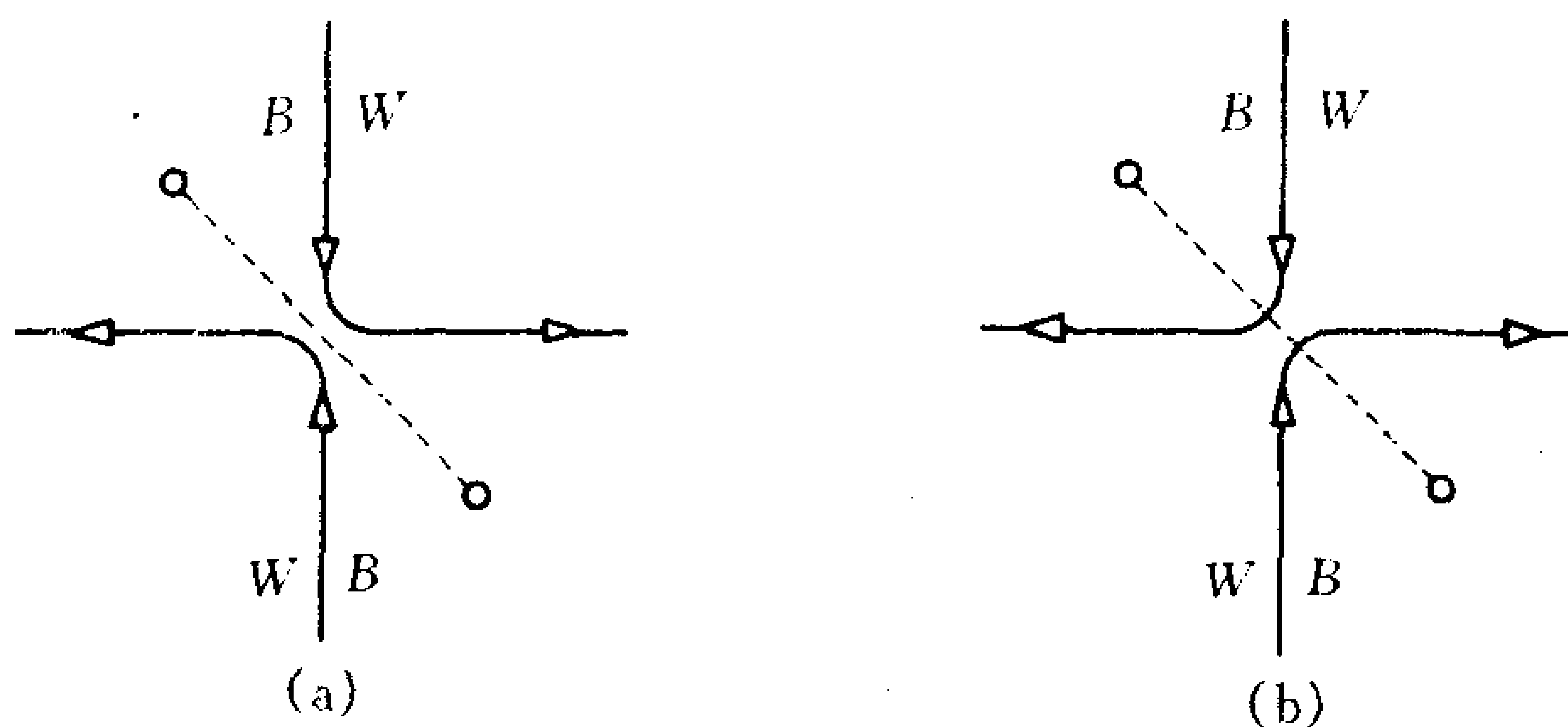


图 13

显然,如果 C 是所产生的 $M(G)$ 的自身不相交的闭曲线的集合,则 T 的边恰好是那些不与 C 相交的边. 从对偶的观点看,我们看到 $\tau^*(T)$ 的边恰好是 $D(G)$ 的不与 C 相交的边. 因为 T 和 $\tau^*(T)$ 都是支撑树,所以 C 恰好生成了平面上两个互补的区域. 因此 C 是一条单重闭曲线. 将 C 转化为 $M(G)$, 我们得到 $M(G)$ 的一个有向欧拉环游. 对于这种运算的例子见图 14(a)和 14(b).

这个结果可概述为下面的定理.

定理 2 $M(G)$ 中有向欧拉环游的数目等于 G 中支撑树的数目.

这个结果的第一个证明是 Kotzig 给出的[4].

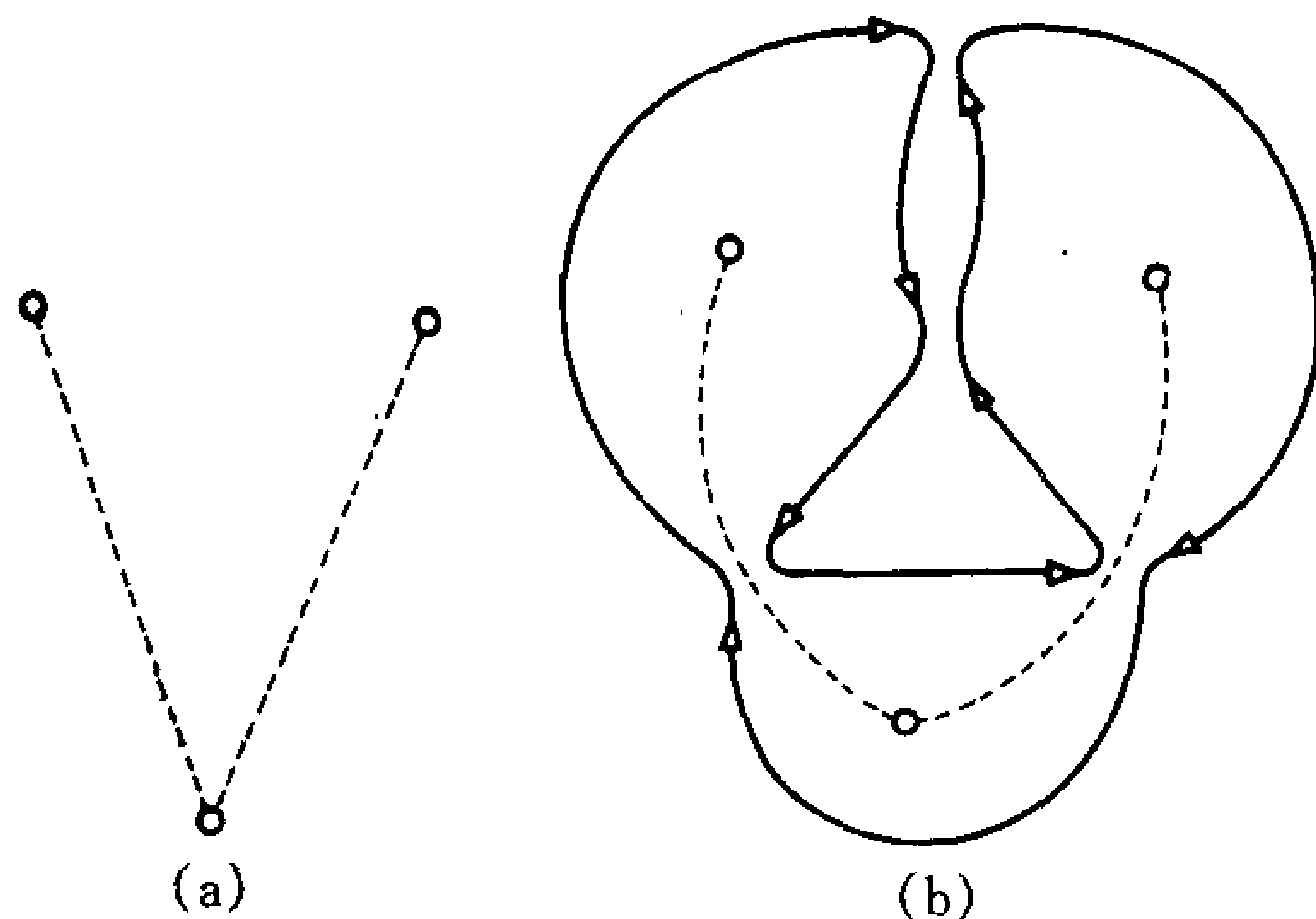


图 14

4. $M(G)$中的欧拉环游和树形图

我们最后的对应是 $M(G)$的有向欧拉环游和树形图间的对应. 事实上,我们这里给出的对应适用于任意在每个顶点恰好有两条边进入和两条边离开的有向图(不必是平面的). 像在引言中所讨论的那样,我们指定根顶点 R 和指向 R 的边 e^* 是任意欧拉环游的最后一条边. 注意这最后的一条边不在 $M(G)$的任意树形图中,因为没有树形图的边指向 R. 在这节中的论证比前面的论证有更多的技巧性.

我们将用的对应是如下的对应. 设 E 是任一个有向欧拉环游. 依次给环游的边标号使 $E=(R,e_1,\cdots,e_n,R)$,其中 $e_n=e^*$. 从 $A_0=R$ 开始生长对应的树形图,然后设 A_{j+1}是 $A_j\cup e_k$,这里 k 是最小指标使 e_k 指向不在 A_j 的一个顶点. 尽可能地继续这个过程(注意因为树形图的边数比顶点数少 1,迭代的次数比 $M(G)$的顶点数少 1.). 对于图 7 中的欧拉环游为 $(R,e_1,t,e_2,s,e_3,R,e_4,u,e_5,s,e_6,u,e_7,t,e_8,R)$. 我们有如图 15

所示的序列 A_0, A_1, A_2, A_3. 显然我们用这种方法构造了一个树形图. 不很清楚的是不同的有向欧拉环游产生不同的树形图且所有的树形图都能用这种方法产生.

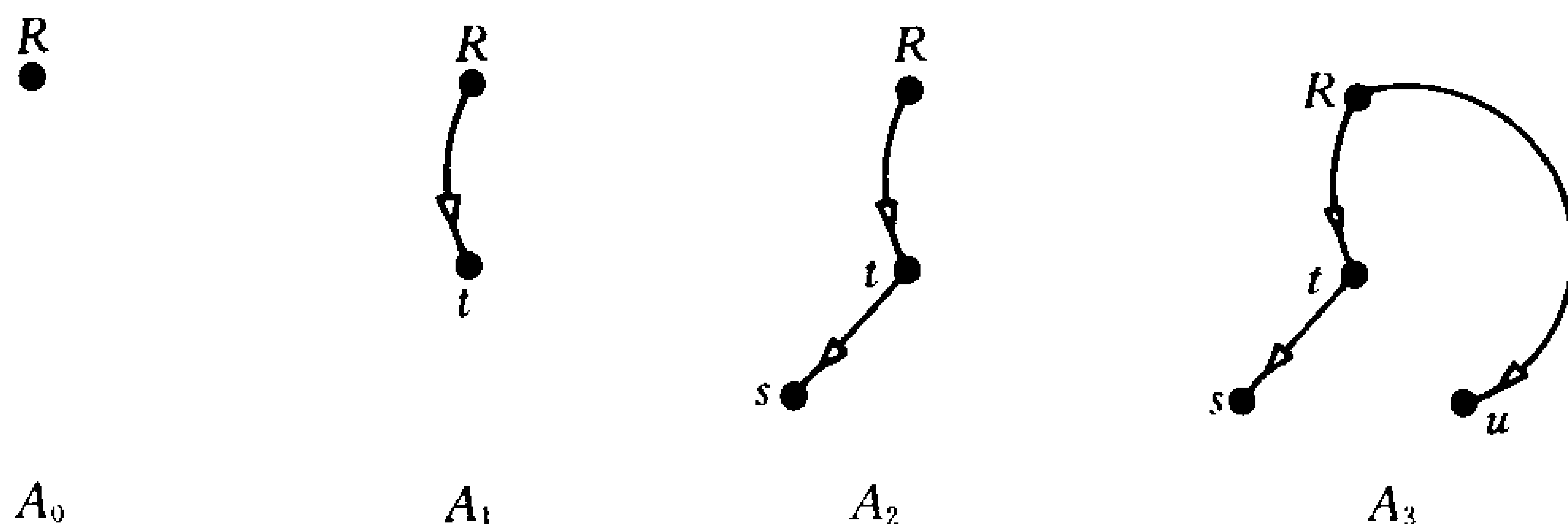


图 15

为了说明确实是这种情况,我们给出逆构造. 给出一个树形图 A,我们归纳地构造一个有向欧拉环游. 我们的工作是倒向追踪. 从 $E_0=(v^*, e^*, R)$开始,这里 e^* 是从 v^* 进入 R 的边. 设 E_j 有起点 v,我们暂时假定它不是 R. 现在共存在两条边,如 e 和 f,指向 v. 这两条边恰好有一条在 A 中;让我们称此边为 e. 如果 f 已经不出现在 E_j 中,则设 E_{j+1}是(f, E_j). 否则设 E_{j+1}是(e, E_j). 换句话说,第一次我们退回到 v,沿不在 A 中的边退出,而第二次(最后一次)我们退回到 v,沿 A 中的边退出. 如果 E_j 的起点是 R,则沿着不是 e^* 的边退出. 图 9 中的树形图产生了有向欧拉环游$(R, u, s, u, t, s, R, t, R)$. 注意 e_8 总是环游的最后一条边.

这个算法必定产生一个欧拉环游不是显而易见的. 设 $W=(R, e_1, v_1, \cdots, v_{n-1}, e_n, R)$是从上面的算法得到的 $M(G)$ 的一个闭途径. 因为我们停止在 R 这一点上,所有进入(因此离开)R 的边必定都在 W 中. 现在设 x 是 $M(G)$的任一点. 在 A 中存在一个唯一的从 R 到 x 的有向途径,设它为$(R, f_1,$

$x_1, \cdots, f_k, x_k)$，其中 $x = x_k$.

由前面的论证，与 R 关联的每一条边在 W 中，于是 f_1 在 W 中，则算法隐含着 x_{j-1} 在 W 中出现两次. 因此与 x_{j-1} 关联的每条边在 W 中出现. 特别地，f_j 在 W 中出现.

因此 x 在 W 中出现两次且这对 $M(G)$ 的每个顶点是真的. 于是 W 是 $M(G)$ 的一个有向欧拉环游. 最后，我们必须说明两种构造是互逆的. 设 E 是有向欧拉环游，设 A 是从 E 构造的树形图且设 E' 是从 A 得到的欧拉环游. 我们必须说明 $E = E'$. E 和 E' 都在 e^* 结束. 归纳地假定 E 和 E' 有公共的末段 $(v_j, e_{j-1}, v_{j+1}, \cdots, v_{n-1}, e^*, R)$.

首先假设 $v \neq R$. 如果这是第一次退回到 v_j，则从 A 指向 v_j 的唯一边 e 不是 E 中的 e_j. 否则当我们从 E 生成 A 时，我们将选择另外的适当的边. 又当我们从 A 生成 E' 时不选 e 作为 e_j——记住当我们第一次回到一个顶点时选不在 A 中的边. 如果这是第二次退回到 v_j，则前面的论述说明了 E 和 E' 沿着 e 退回. 没有另外的选择. 另一方面，若 $v_j = R$，则存在唯一的不等于 e^* 的边指向 R. 这条边必须是 e_j. 因此 E 和 E' 有相同的末段 $(v_{j-1}, e_j, \cdots, e^*, R)$. 由归纳法知 $E = E'$.

现在假设 A 是一个树形图，E 是由 A 构造的欧拉环游且 A' 是从 E 得到的树形图. 记 $E = (R, e_1, v_1, \cdots, v_n, e^*, R)$. 显然，$e_1$ 在 A' 中当且仅当 e_1 指向不同于 R 的某个顶点. 现在，在从 A 构造 E 中除非 $v_1 = R$，我们知道 e_1 也在 A 中. 因此 e_1 在 A 中当且仅当 e_1 指向不同于 R 的某个顶点. 因此 e_1 在 A 中当且仅当 e_1 在 A' 中.

我们现在用归纳法进行证明，假定对所有的 $1 \leqslant j \leqslant k$，$e_j \in A$，当且仅当 $e_j \in A'$. 我们知道 $e_{k+1} \in A'$，当且仅当 v_{k+1} 是顶点 $v = v_{k+1}$ 在 E 中第一次出现. 这一点发生当且仅当我们在 E

中倒向追踪时 v 第二次出现. 这最后的条件等价于 $e_{k+1} \in A$. 因此 $A = A'$,如所需要的那样.

我们得到了什么呢? 我们给出了一个从有向欧拉环游到树形图的一个映射 f 和从树形图到欧拉环游的一个映射 g, 使 $f \cdot g$ 和 $g \cdot f$ 都是恒等映射. 结果 f 和 g 是双射且因此下面的结论成立.

定理 3 在 $M(G)$中有向欧拉环游的数目等于 $M(G)$中根在 R 的树形图的数目.

这个最后的定理是关于一个欧拉环游的定向图中欧拉环游的数目及图中的树形图的数目的称为 BEST(de Bruijn, Ehrenfest, Smith 和 Tutte)定理的特殊情况. 例如, 可在 Berge 的书[2,定理 4,p. 169]中找到一个证明. 事实上,那里的证明是这里所给出的证明的一个直接推广.

(刘桂真编译)

参 考 文 献

[1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, Graph Theory with Applications, North-Holland, New York, 1982.

[2] C. Berge, The Theory of Graphs and its Applications, New York, John Wiley and Sons, 1966.

[3] F. Harary, Graph Theory, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1972.

[4] A. Kotzig, Eulerian Lines in Finite 4-Valent Graphs and Their Transformations, in Theory of Graphs: Colloquium at Tihany, Hungary, 1966, P. Erdös and G. Katona(eds.), Academic Press, New York, 1968.

[5] H. Shank, The Theory of Left-Right Paths, Combinatorial Mathematics Ⅲ, Lecture Notes in Mathematics 452, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[6] W. T. Tutte, Graph Theory, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1984.

[7] H. Whitney, Non-Separable and Planar Graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **34**(1932), 339~362.

附录　图的支撑树与欧拉环游简介

刘桂真

1. 图的基本概念

一个图是一个有序对 $G=(V,E)$，其中 V 是有限元素的集合，称为图的顶点集合；E 是图的边集合，E 中的每个元素是 V 中两个元素构成的一个无序元素对. 若 e 是 E 中的元素，由 V 中的两个元素 u,v 构成，记作 $e=uv$，我们则说 V 中的元素 u 和 v 是邻接的，并且说顶点 u 和 v 是边 e 的端点. 若一条边有两个相同的端点，即 $e=uu$，则称它为图的环. 若 $e_1=uv$ 与 $e_2=uv$ 是 E 的元素，则称 e_1,e_2 是图的重边. 我们通常画一个图形来表示一个图. 用平面上的点来表示图的顶点，用连接两个点的线段来表示图的边. 为方便计，也称这个图形本身为图. 例如，图 1 中的图有顶点集合 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，边集合 $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$，其中 $e_1=v_1v_1$，$e_2=v_1v_3$，$e_3=v_1v_2$，$e_4=v_1v_2$，$e_5=v_2v_3$，$e_6=v_3v_4$. e_1 是环，而 e_3,e_4 是图的重边. 也有的教科书中称上面的图为多重图. 图是指没有环和重边的图.

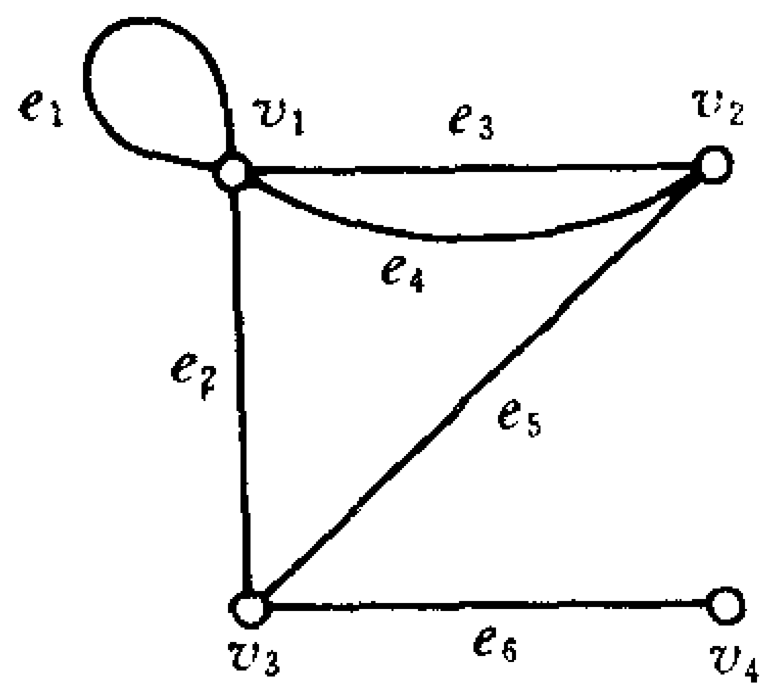


图　1

设 G 是一个图，由 G 的部分顶点和边构成的图称为图 G 的子图. 设 $P=v_1e_1v_2e_2\cdots v_ke_kv_{k+1}$ 是图 G 中的一个顶点和边的交错序列，使 v_i 和 v_{i+1} 是 e_i 的端点，$1\leqslant i\leqslant k$，则称 P 是图 G 中的一条连接顶点 v_1 和 v_{k+1} 的道路. 特别地，若 $v_1=v_{k+1}$，则称 P 为一条闭道路. 若 P 是一条

闭道路且顶点和边都不相同，则称它是一个圈. 例如，图 1 中的 $P=v_1e_3v_2e_4v_1e_2v_3e_6v_4$ 是一条连接 v_1 与 v_4 的道路，而 $v_1e_2v_3e_5v_2e_3v_1$ 是一个圈. 若对图 G 中的任意两个顶点都存在连接它们的道路，则称图 G 是*连通的*. 图 1 中的图是连通的. 对图 G 中的任一顶点 v，用 $d(v)$表示 G 中以 v 为端点的边的数目(对环计数两次)，称它为 v 的*次数*. 在图 1 中，$d(v_1)=5$，$d(v_2)=3$ 等等. 有关图的进一步的一些概念和术语读者可参见文献[1].

实际中有许多问题可抽象为一个图来研究. 例如，若顶点表示城市，边表示城市间的铁路或公路，一个图就表示一个交通网络. 若顶点代表通信站，边代表通信线路，一个图就表示一个通信网络. 因此图的理论在实际中有广泛的应用. 在本文中我们将介绍在实际中应用较广的图论中的两个问题——图的*支撑树*与图的*欧拉环游*.

2. 图的支撑树

若图 G 是连通的且不含圈，则称它为一*棵树*. 图 2 中所示的图即为一棵树. 它有 10 个顶点，9 条边，且任意 2 个顶点之间只有一条连接它们的道路. 一般地，我们有下面的定理.

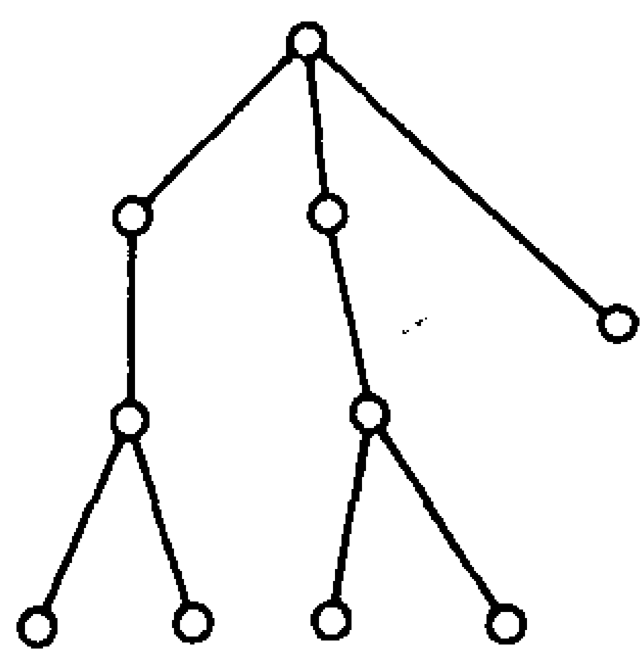


图 2

定理 1 设图 G 是一棵树，它有 n 个顶点，则 G 有 $n-1$ 条边且任意两个顶点之间只有一条连接它们的道路.

证明 G 是一棵树，则它是连通的且不含圈. 我们首先说明 G 中至少有一个次数为 1 的顶点. 否则，G 中每个顶点的次数不小于 2. 我们从任一个顶点开始沿着 G 中的边和顶点走下去，使走过的边不

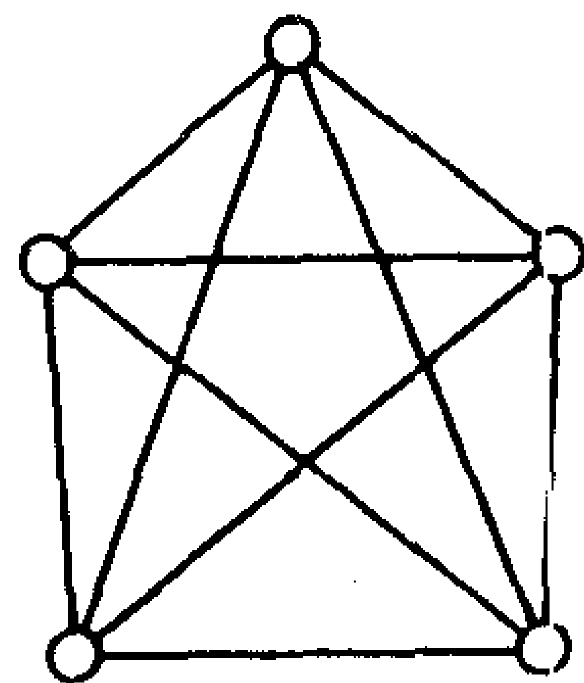
重复.由于每个顶点至少有两条边与它相遇,这总是可能的.但由于 G 有有限个顶点,故我们必定能回到某个已经走过的顶点,即 G 中含圈,矛盾.我们对 G 的顶点数用归纳法来证明 G 有 $n-1$ 条边.$n=1$,显然结论成立.若对 $n-1$ 结论成立.当 G 有 n 个顶点时,由上面的证明知 G 中至少有一个次数为 1 的顶点 v.从 G 中去掉顶点 v 及其以 v 为端点的唯一的边所得的图 G' 仍然是一棵树.它有 $n-1$ 个顶点.由归纳法假定,G' 有 $n-2$ 条边.这样 G 有 $n-1$ 条边.由于 G 不含圈,易见任意两个顶点之间必然存在唯一的一条连接它们的道路.

从上面的定理易见树是一个极小连通图.即去掉树中的任一条边,它就不连通了.

设 G 是一个连通图.若它不含圈,那么它就是一棵树.否则,选任一条含在圈中的边 e,从 G 中去掉边 e 得图 G'.显然 G' 仍然是连通的.若 G' 不含圈,则它是一棵树.否则重复上面的过程,我们最后一定能得到 G 的一个子图 T,使它是连通的,不含圈,且与 G 有相同的顶点集合.我们称图 T 为 G 的一棵**支撑树**.这样我们有下面的定理.

定理 2 每个连通图都有一棵支撑树.

如果能将一个图画在平面上,使它的任意两条边除公共端点外没有其他交点,则称这个图为**平面图**.例如,图 1 和图 2 都是平面图.图 3 不是平面图,因为找不到一种画法使它的边除端点外不相交.


图 3

在若干实际问题中需要研究图中支撑树的数目.特别是平面图及其与它相关的图中支撑树的数目.在下一篇文章中将详细地讨论这个问题.

3. 图的欧拉环游

1736 年欧拉(Euler)解决了下面的哥尼斯堡七桥问题. 有七座桥将普莱格尔河中的两个岛 A 与 D 与河岸 B,C 连接起来,如图 4 所示. 问是否可能从四块陆地中的任一块开始通过每一座桥恰好一次再回到起点. 读者不难通过试验摸索去尝试解决这个问题,但你将会发现任何尝试都不可能成功. 欧拉指出了这个问题不可能有解. 他将每块陆地用顶点表示,将每座桥用连接相应两个顶点的边来表示,从而得到了一个如图 5 所示的图. 上述问题化为在图 5 中是否存在一条过每条边恰好一次的闭道路. 下面我们给出上述问题的一般解法.

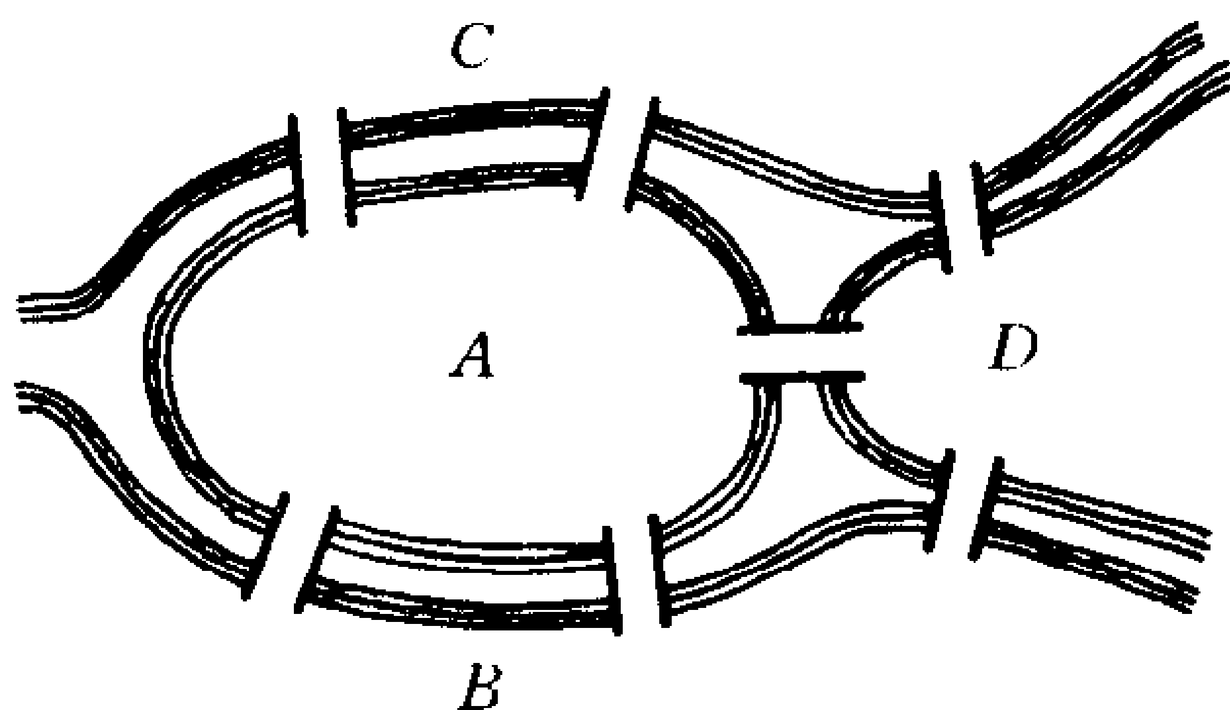


图 4

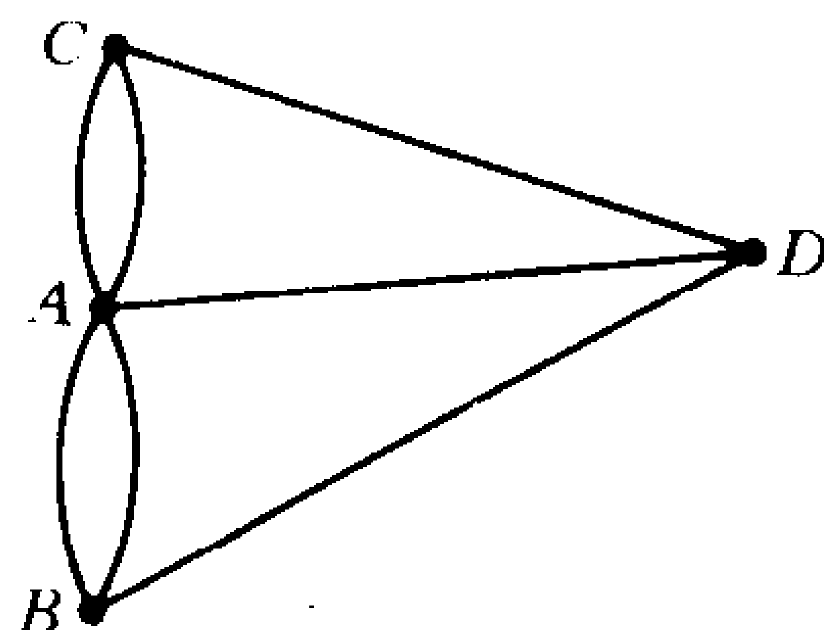


图 5

一般地,给定一个连通图 G,G 的一个欧拉环游是指 G 中的一条过 G 的每条边恰好一次的闭道路. 显然不是每个连通图都有一个欧拉环游. 如果图 G 有一个欧拉环游 P,它从某个顶点 v 开始并且在 v 结束. 我们从 v 开始沿着 P 经过 G 的每条边恰好一次回到 v. 显然,每当我们沿着一条边进入一个顶点时,必须再沿着以它为端点的另一条边出来. 这样每经过一个顶点一次,必须使用两条以它为端点的边. 于是 G 的每个顶点的次数必须为偶数. 下面的定理说明了这个条件也是

充分的.

定理 3 一个连通图 G 有一个欧拉环游当且仅当它的每一个顶点的次数都是偶数.

关于这个定理的详细证明可参见文献[2]. 在这里我们只给出定理充分性证明的一个简单概述. 若图 G 的每个顶点的次数都是偶数,利用定理 1 中开始的证明方法易见图 G 的边可以划分为一些不相交圈 $C_1, C_2, \cdots, C_r$ 的并. 又图 G 是连通的,每个圈必定至少与另一个圈有一个公共顶点. 我们对 r 用归纳法来证明定理. 若 $r=1$,显然,C_1 是 G 的欧拉环游. 若 $r>1$,我们选一个适当的圈,不妨设它为 C_r,使由 $C_1, C_2, \cdots, C_{r-1}$的并构成的图 G'是连通的. 显然 G'的每个顶点的次数都是偶数. 由归纳法假定,G'有一个欧拉环游 P'. P'与 C_r 至少有一个公共顶点,不难看出 P'与 C_r 一起构成了 G 的一个欧拉环游.

在实际中的中国邮递员问题就是上述问题的一个推广(见[3]).

4. 有向图

如果我们给图的每条边一个定向,则图 G 成为一个有向图. 即在有向图中它的边是顶点集合中的一个*有序对*. 图 6 中所示的图为一个有向图. 对 G 中的一个顶点 v,用 $d^+(v)$表示离开 v 的边的数目,称它为 v 的*出次*,用 $d^-(v)$表示进入 v 的边的数目,称它为 v 的*入次*. 若对 G 中的每个顶点 v 都有 $d^+(v)=d^-(v)$,则称有向图 G 是*平衡的*. 下面我们将前面讨论过的支撑树及欧拉环游的概念推广到有向图.

设 G 是一个有向连通图,R 是 G 中指定的一个顶点. G 的一个*根在 R 的树形图* A 是指 G 的一个子图,在不考虑边的

方向时它是 G 的一棵支撑树，使 $d^-(R)=0$ 且当 $v\neq R$ 时有 $d^-(v)=1$. 图 7 是图 6 中有向图的一个根在 R 的树形图.

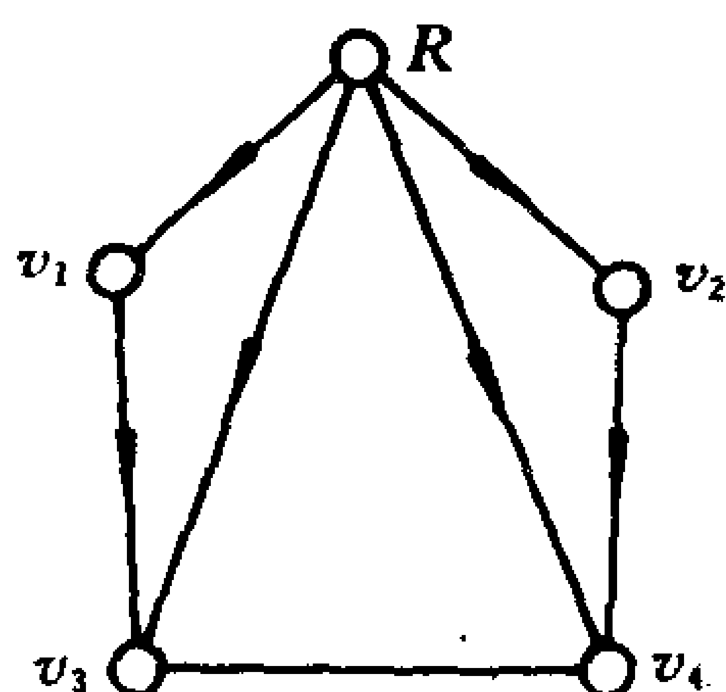


图 6

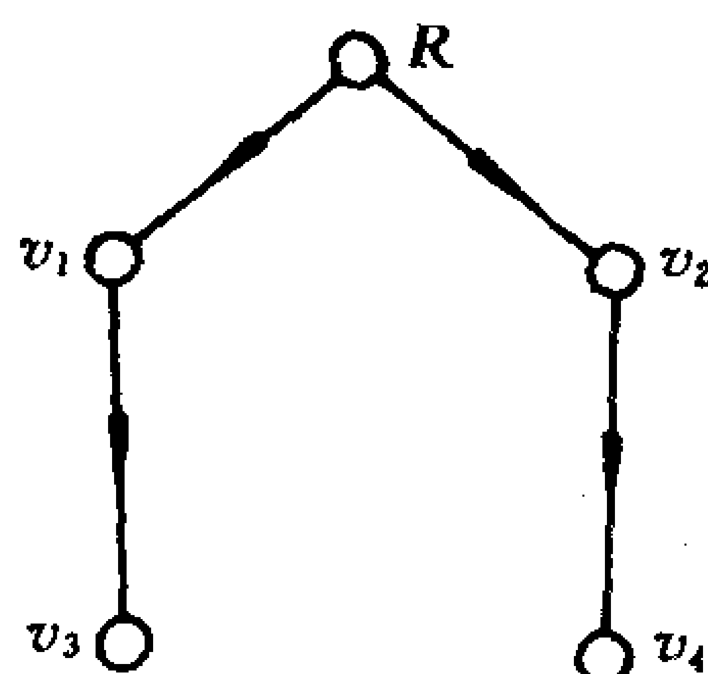


图 7

不难看出，不是所有的有向连通图都有树形图，且一个有向图可以有不只一个树形图.

有向图 G 的一个有向欧拉环游是从 G 的同一个顶点开始并结束，沿着与边的定向相同的方向经过 G 的每条边恰好一次的一条有向闭道路. 用与第 3 节中类似的方法，读者不难验证下面的定理成立.

定理 4 一个有向图 G 有一个有向欧拉环游当且仅当它是平衡的.

表面看来，一个有向图的树形图与它的欧拉环游之间似乎没有什么关系. 但实际上这二者之间存在着非常有趣的联系. 在下一篇文章中将专门来讨论这个问题.

参 考 文 献

[1] Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., Graph Theorem with Applications, North-Holland, New York(1976).

[2] Harary, F., Graph Theory, Addison-Wesley, Pub. Co. Inc. Reading, Mass. (1969).

[3] 管梅谷，奇偶点图上作业法，《数学学报》，**10**(1960)，263～266.

蝴蝶形问题及其推广[①]

Leon Bankoff

蝴蝶形问题是 Euclid 几何经过久远的年代留存下来并且仍然使人感兴趣的问题之一，我们把它叙述如下：

在圆 C 中（见图 1），过任一弦 AB 的中点 I，任作两弦 MN 和 OL. 设 ML、ON 与 AB 的交点分别为 P,Q. 求证：$PI=IQ$.

这个问题的得名是由于它的图形像一只蝴蝶. 一个好听的名字总是容易引起人们的注意. 不过我们对它感兴趣主要是因为从这样一个单一的问题可以引发出几何证明的诸多技巧，并引伸出各种推广或变形，下面我们介绍它的几种主要证法和推广.

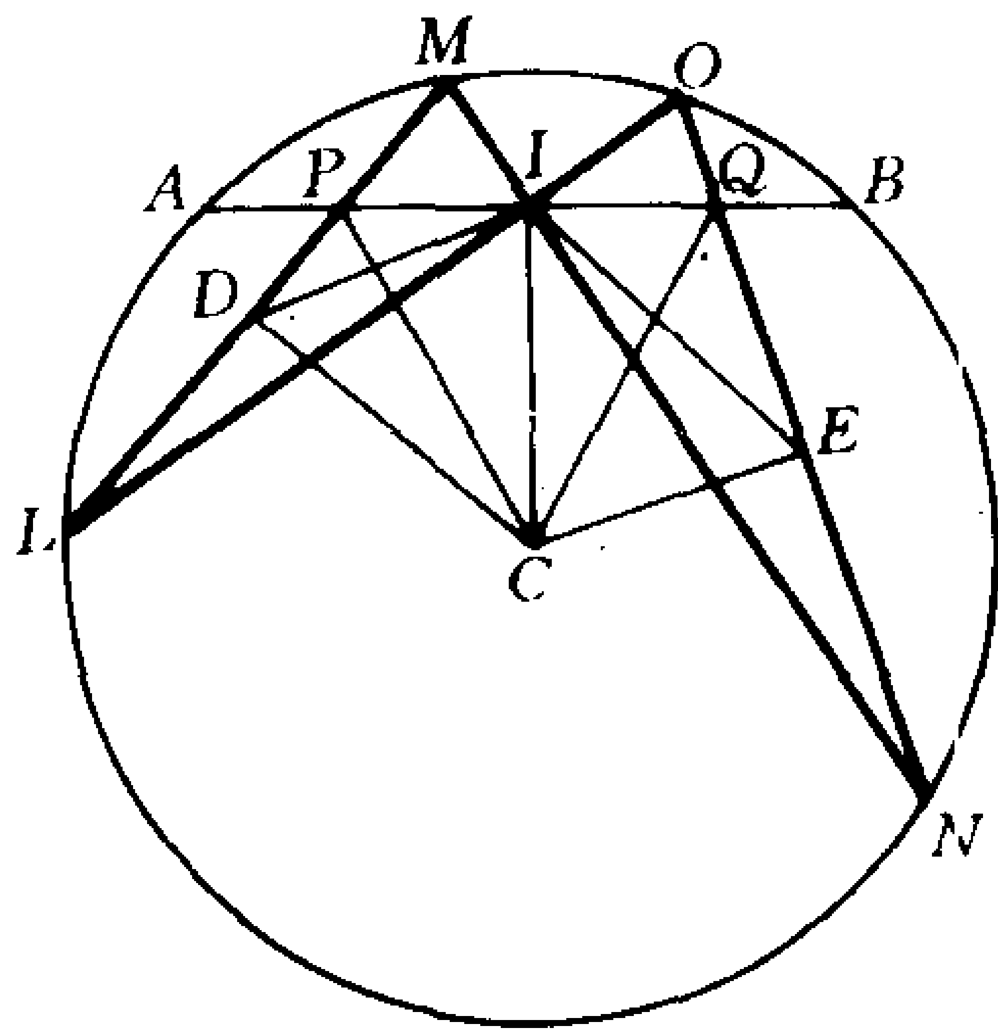


图 1

初等几何证法

（1） 在图 1 中，记弦 ML,ON 的中点分别为 D, E，连接 ID 和 IE. 易见 $\triangle MLI \backsim \triangle ONI$，而 ID,IE 是这两个相似三角形的对应中线. 因此有 $\angle MDI =$

---

① 编译自"The Metamorphosis of the Butterfly Problem", *Math. Magazine*, **60**(1987), 195～210.

$\angle OEI$. 另一方面，由于 I,D,E 都是弦的中点，四边形 $PDCI$，$QECI$ 都是圆内接四边形. 于是有$\angle PDI=\angle PCI$，$\angle QEI=\angle QCI$. 两方面合起来就有 $\angle PCI=\angle QCI$，这是因为 $\angle MDI$，$\angle OEI$ 其实分别就是$\angle PDI$，$\angle QEI$. 现在易得直角三角形 PCI 和 QCI 全等. 从而有 $PI=IQ$（若弦 ML 或 ON 的中点恰与它们和 AB 的交点重合，上述证明中的四边形变为三角形，这时利用直角三角形两锐角互余易证得 $\Delta PCI\cong\Delta QCI$）.

(2) 在图 2 中，考虑 ΔHMK，它被 FG 和 DE 所截，分别交于 F，C，G 和 D，C，E，应用 Menelaus 定理（请参阅 H. S. M 考克塞特和 S. L. 格雷策著《几何学的新探索》可得

$$\frac{CH}{CK}\cdot\frac{GK}{GM}\cdot\frac{FM}{FH}=1,$$

$$\frac{CH}{CK}\cdot\frac{DK}{DM}\cdot\frac{EM}{EH}=1,$$

两式相乘，得

$$\frac{CH^2\cdot GK\cdot DK\cdot FM\cdot EM}{CK^2\cdot FH\cdot EH\cdot GM\cdot DM}=1.$$

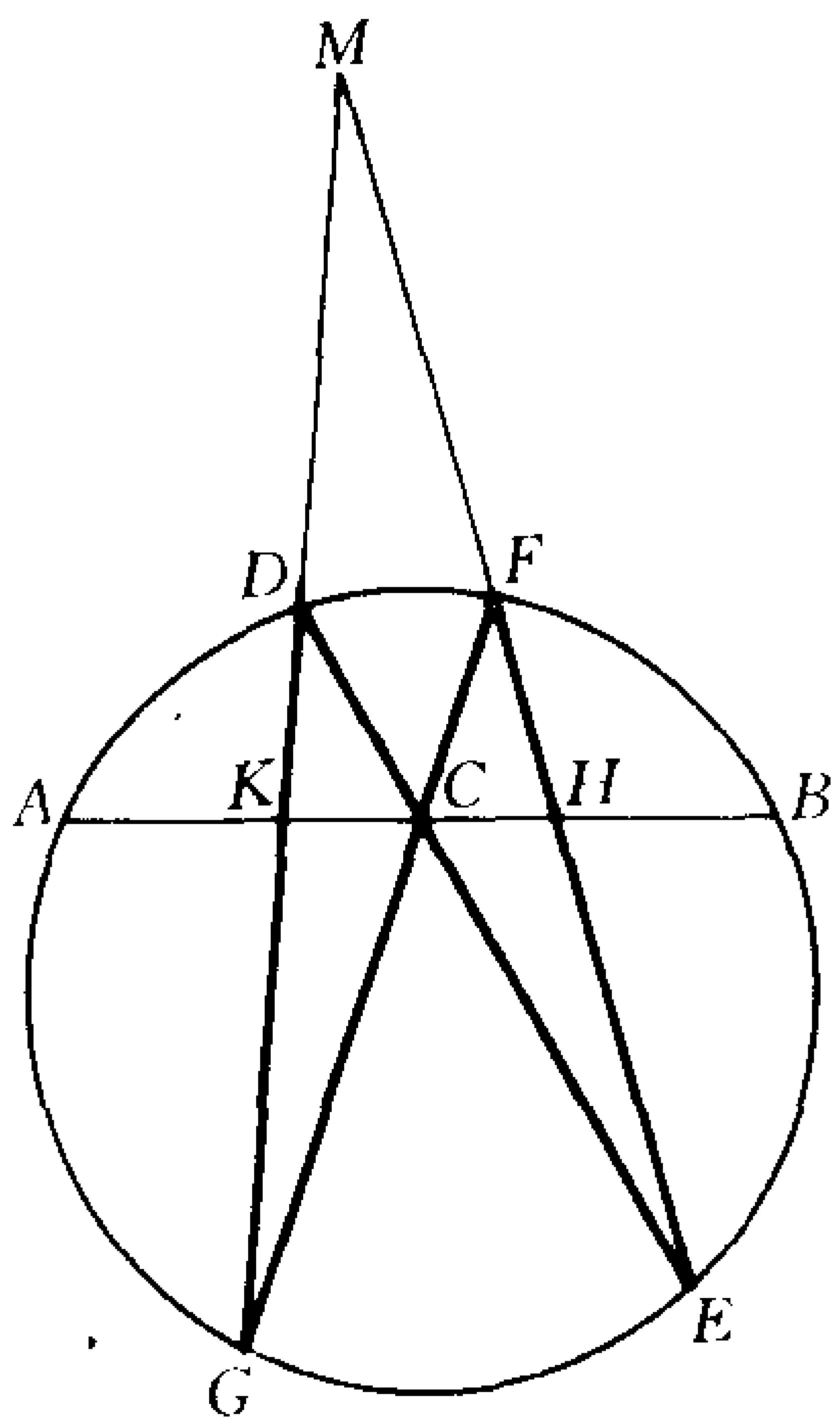


图 2

因为 $FM\cdot EM=GM\cdot DM$，从上式可导出

$$\frac{CH^2}{CK^2}=\frac{FH\cdot EH}{GK\cdot DK}=\frac{AH\cdot HB}{AK\cdot KB}$$

$$=\frac{(AC+CH)(AC-CH)}{(AC-CK)(AC+CK)}$$

$$=\frac{AC^2-CH^2}{AC^2-CK^2}.$$

化简上式后，可得

$$CH = CK.$$

三角证法

首先我们定义共线四点 P,R,M,Q 的交比(PRMQ)为

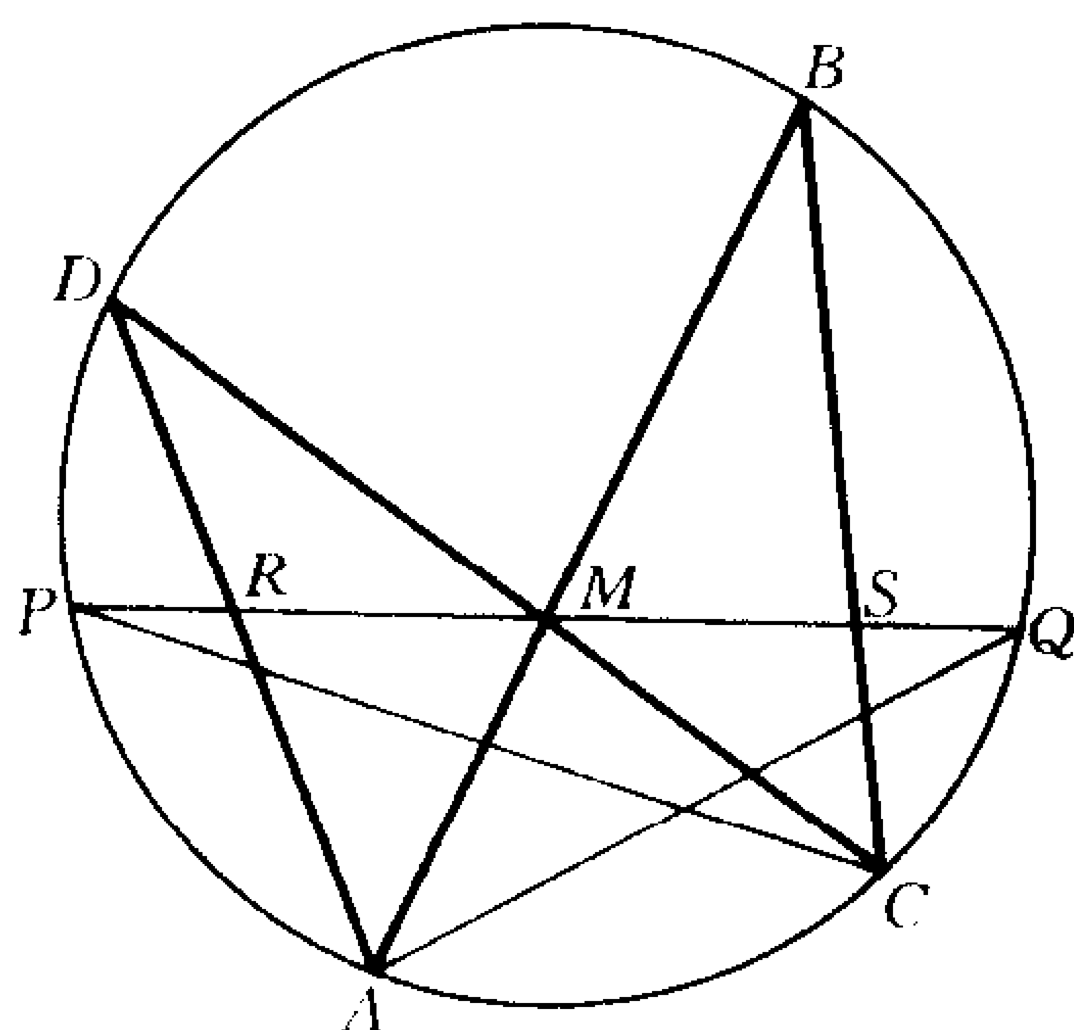


图 3

$\frac{PM}{MR}\Big/\frac{PQ}{QR}$. 在图 3 中，利用正弦定理可以得到

$$\frac{PM}{MR} = \frac{PM}{AM}\Big/\frac{MR}{AM} = \frac{\sin\angle PAM}{\sin\angle MPA}\Big/\frac{\sin\angle RAM}{\sin\angle MRA},$$

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{PQ}{AQ}\Big/\frac{QR}{AQ} = \frac{\sin\angle PAQ}{\sin\angle QPA}\Big/\frac{\sin\angle RAQ}{\sin\angle QRA}.$$

于是有

$$\begin{aligned}(\mathrm{PRMQ}) &= \frac{\sin\angle PAM}{\sin\angle RAM}\Big/\frac{\sin\angle PAQ}{\sin\angle RAQ}\\ &= \frac{\sin\angle PAB}{\sin\angle BAD}\Big/\frac{\sin\angle PAQ}{\sin\angle QAD}.\end{aligned}$$

类似地有

$$(\mathrm{PMSQ})=\frac{PS}{SM}\Big/\frac{PQ}{QM}=\frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle BCD}\Big/\frac{\sin\angle PCQ}{\sin\angle QCD}.$$

对上面两式的右边反复应用“同弧上圆周角相等”的性质，可得到(PRMQ)=(PMSQ)，即有$\frac{PM}{MR}\cdot\frac{QR}{PQ}=\frac{PS}{SM}\cdot\frac{QM}{PQ}$. 又由于 $PM=MQ$. 所以有 $RQ\cdot MS=PS\cdot RM$，即有$(RM+MQ)\cdot MS=(PM+MS)\cdot RM$，化简得 $MQ\cdot MS=PM\cdot RM$. 故有 $MS=RM$.

用 Candy 定理的方法

蝴蝶形问题可以作为 Candy 定理的一个简单推论得到证明. 下面我们先证明这个定理.

Candy 定理 设 O 是圆 C 中弦 AB 上任意一点，过 O 任作两弦 CD，EF，连 CF，ED，它们分别交 AB 于 G，H，则有$\frac{OA\cdot OB}{OG\cdot OH}=\frac{OB-OA}{OH-OG}$（见图 4）.

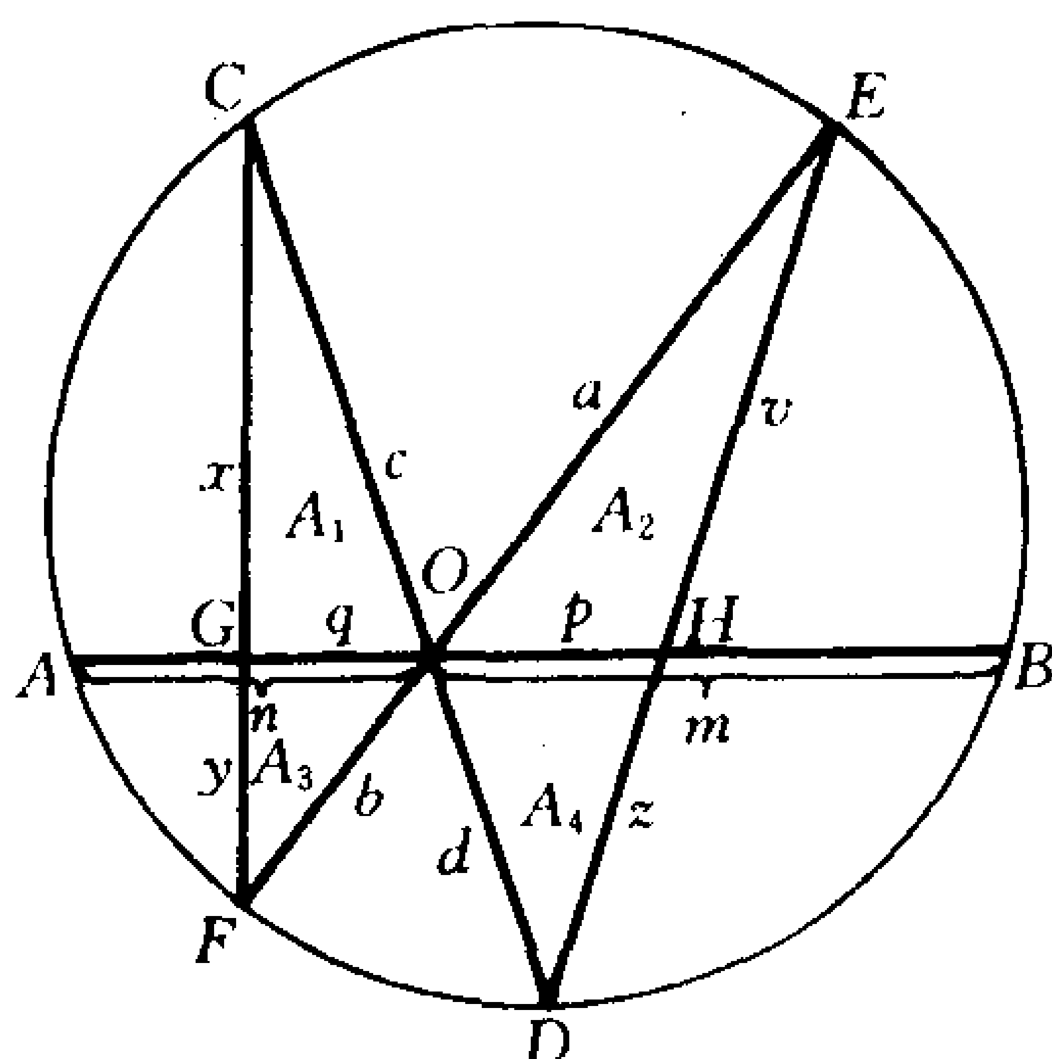


图 4

证明 在图 4 中,记$\triangle CGO$,$\triangle EOH$,$\triangle GOF$和$\triangle ODH$的面积分别为A_1,A_2,A_3和A_4. 记$OB=m$,$OA=n$,$OH=p$. $OG=q$,$OE=a$,$OF=b$,$OC=c$,$OD=d$,$CG=x$,$GF=y$,$EH=v$和$HD=z$. 因为$\angle C=\angle E$,$\angle F=\angle D$等等,有

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{cx}{av},\quad \frac{A_3}{A_4}=\frac{by}{dz},\quad \frac{A_1}{A_4}=\frac{cq}{dp},\quad \frac{A_3}{A_2}=\frac{bq}{ap}.$$

从而有

$$\frac{A_1A_3}{A_2A_4}=\frac{bcxy}{advz}=\frac{bcq^2}{adp^2}$$

因此可得出

$$\frac{q^2}{p^2}=\frac{xy}{vz}=\frac{AG\cdot GB}{AH\cdot HB}=\frac{(n-q)(m+q)}{(n+p)(m-p)}$$

$$=\frac{mn-q(m-n)-q^2}{mn-p(m-n)-p^2},$$

化简后得到

$$mn(p-q)=pq(m-n),\tag{1}$$

即有

$$\frac{OA\cdot OB}{OG\cdot OH}=\frac{OB-OA}{OH-OG}.$$

证毕.

在 Candy 定理中,当取O为AB的中点时,就变成蝴蝶形问题,这时$m-n=0$,于是由(1)式得到$p=q$,即$GO=OH$.

如果我们把(1)式改写为

$$\frac{1}{q}-\frac{1}{p}=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}.\tag{2}$$

用它可以很简便地解决下面的三翼蝴蝶形问题.

设圆中弦AB被C,D三等分,P是圆周上任一异于A,B的点. 连接PD,PC并延长分别交圆于E,F. 再连接EC,FD

并延长分别交圆于 G,H. 弦 GF,HE 分别交 AB 于 L,M. 证明：$AL=MB$(见图 5).

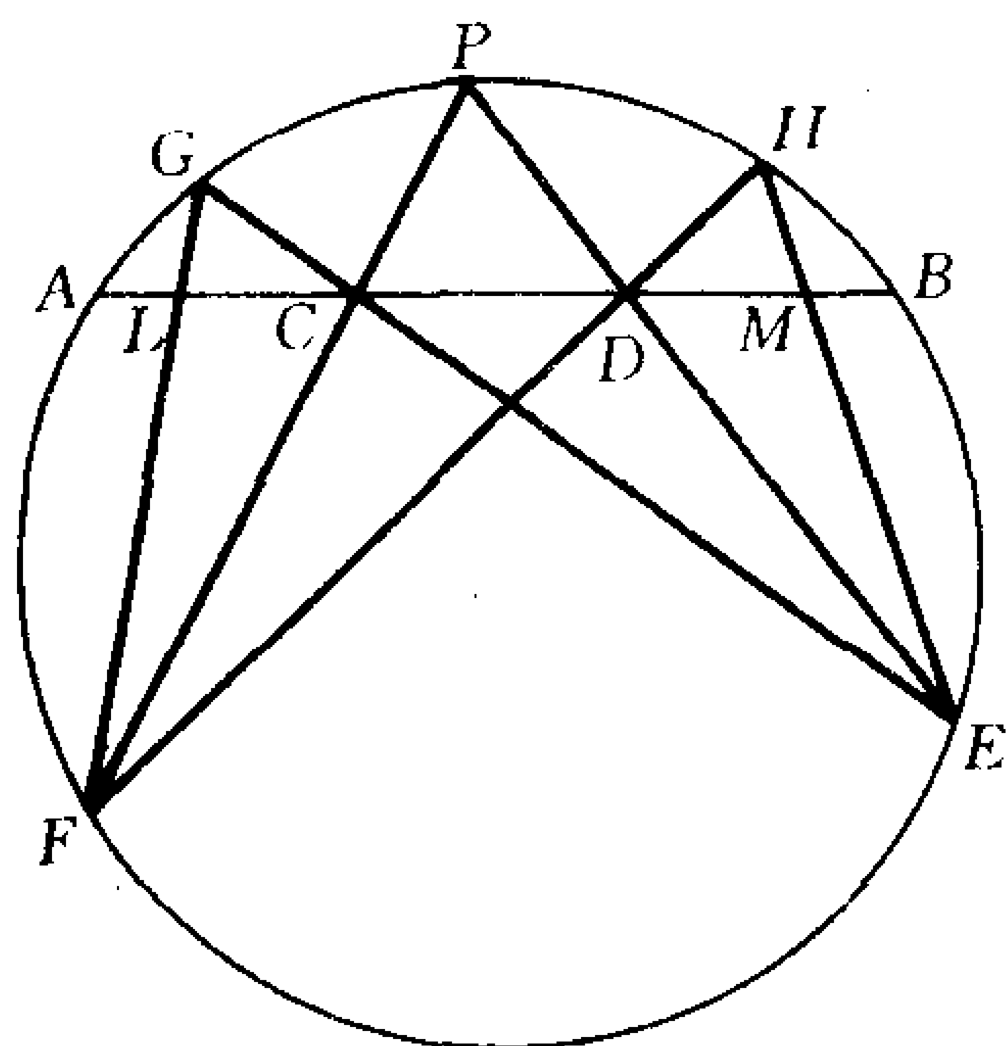


图 5

我们先对由弦 GE 和 PF 确定的蝴蝶形应用 Candy 定理. 沿用定理证明中的记号，令 $AC=n=1,CB=m=2,CD=p=1$. 则由(2)式可得 $LC=q=2/3$. 再对由弦 PE 和 HF 确定的蝴蝶形应用 Candy 定理；同样可得 $DM=2/3$. 最后，因为 $AC=DB$，证得 $AL=MB$.

解析几何证法

在图 6 中，以 M 为原点，AB 为 x 轴，MO 为 y 轴，建立直角坐标系，其中 $O(o,d)$是圆 Γ_1 的中心. 设 Γ_1 的半径为 r. 则它的方程可表为

$$\sum\nolimits_1 \equiv x^2+(y-d)^2-r^2=0.$$

过原点的一对相交直线 CD 和 EF 构成一条退化的圆锥曲线 Γ_2，它的方程应有如下形式

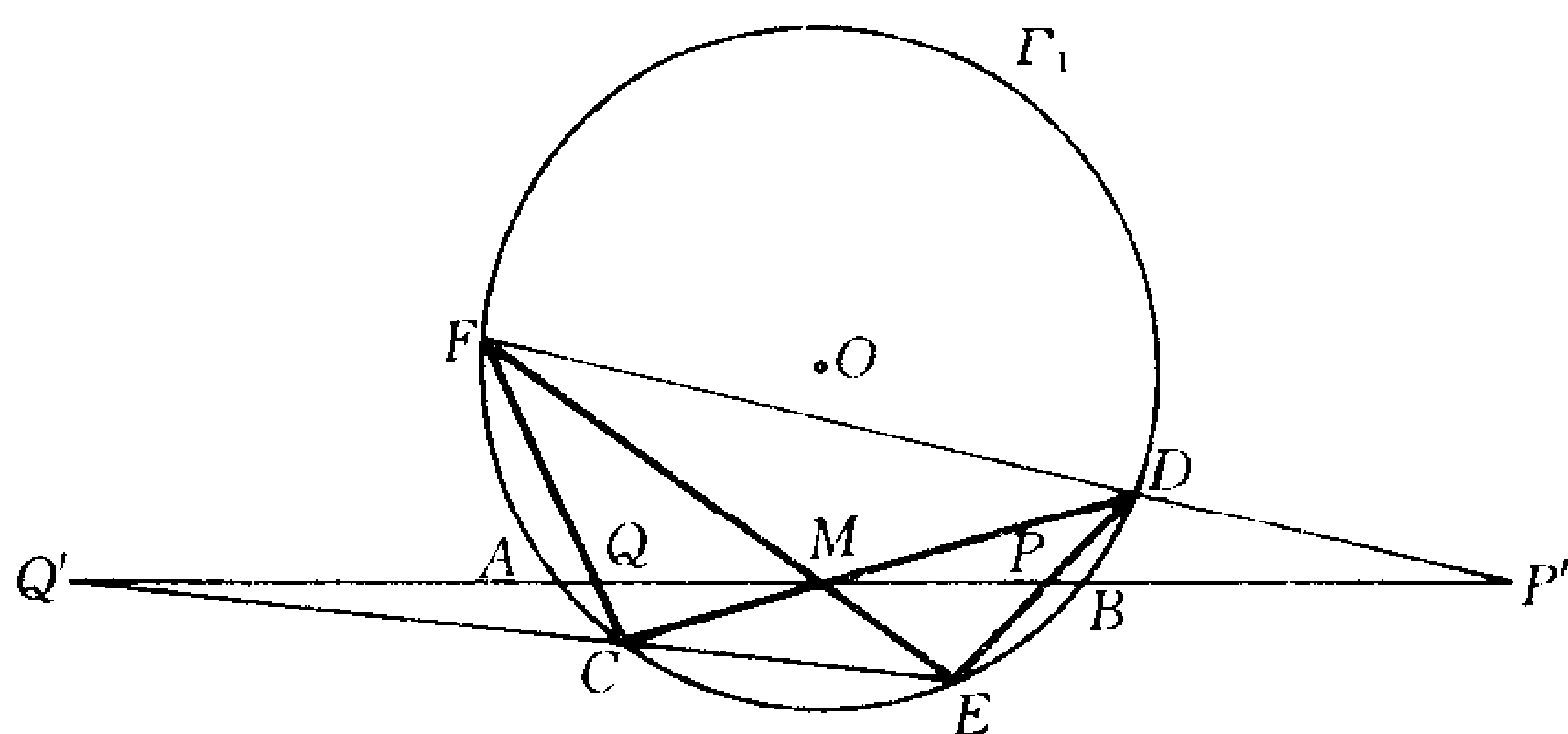


图 6

$$\sum\nolimits_2 \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 = 0.$$

考虑由 Γ_1 和 Γ_2 决定的圆锥曲线族(s)，它们均过 Γ_1 和 Γ_2 的交点 C,D,E,F，方程可表示为

$$\sum \equiv k\sum\nolimits_1 + l\sum\nolimits_2,$$

其中 k,l 为任意实数.

假设(s) 中一曲线 $\sum = 0$ 交 AB 于 V,W（见图 7）. 由于 AB 的方程是 $y = 0$，且 $\sum_1(x,0) = x^2 + d^2 - r^2$，$\sum_2(x,0) = ax^2$. V,W 的横坐标是方程 $\sum(x,0) = 0$ 的根，即

$$k(x^2 + d^2 - r^2) + lax^2 = 0$$

的根. 这个方程中没有一次项，由韦达定理，其两根之和为 0，即

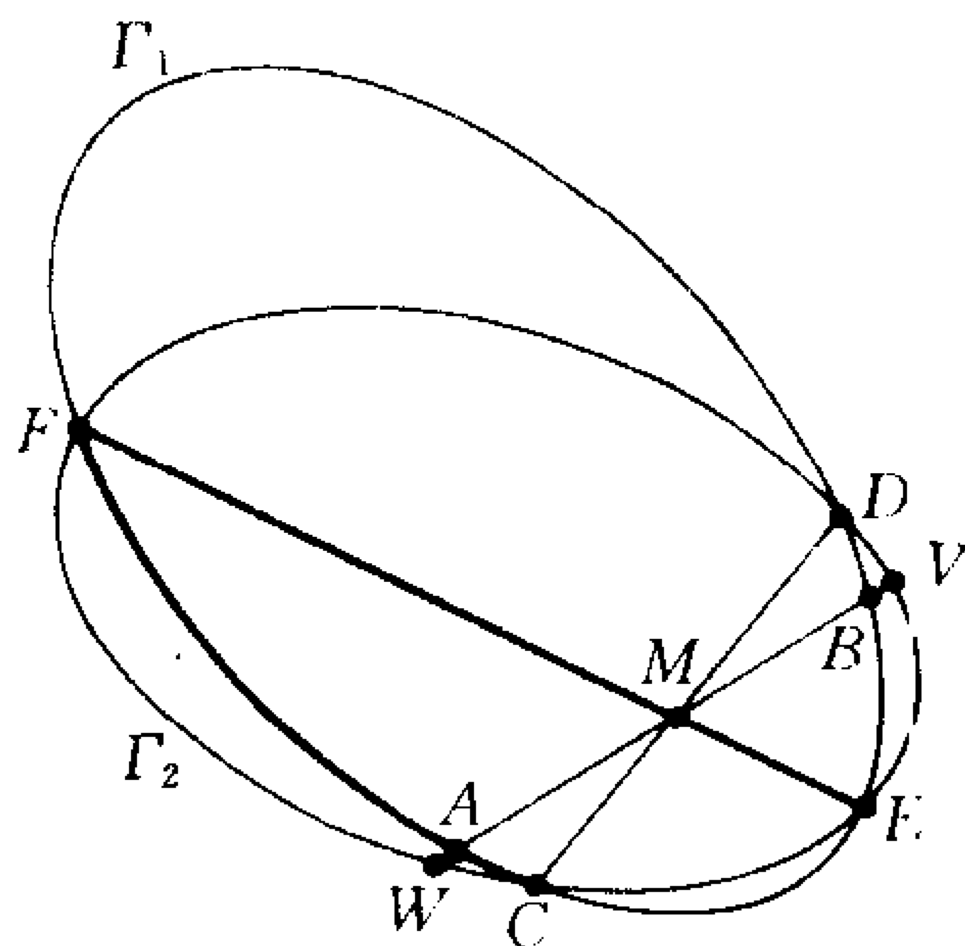


图 7

有 $\overrightarrow{MV} + \overrightarrow{MW} = 0$. 于是，$VM = MW$. 这个结论对$(s)$中任一曲线均成立. 直线对 ED,CF 属于(s)，故有 $PM = MQ$. 证毕.

直线对 CE、DF 也属于(s)，记它们与 AB 的交点分别为 Q'，P'，则亦有 $P'M=MQ'$（见图 6）.

一般地，假设 Γ_1 是一个圆锥曲线，其方程为

$$\sum_1 \equiv Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0.$$

沿用前面的记号，有

$$\sum(x,0) = k(Ax^2 + 2Gx + C) + lax^2.$$

设 A，B 的坐标分别是$(-\alpha,0)$，$(\alpha,0)$，则有 $\sum_1(-\alpha,0) = \sum_1(\alpha,0) = 0$，由此导出 $G=0$. 于是在方程 $\sum(x,0)=0$ 中没有一次项. 证明的其余部分如前所述，这样我们就解决了下面的广义蝴蝶形问题：

设 Γ_1 是一圆锥曲线，M 是 Γ_1 的弦 AB 的中点，弦 CD，EF 过 M. 另一圆锥曲线 Γ_2 过 C，D，E，F，交 AB 于 V，W. 求证 $VM=MW$（见图 7）.

（李世杰编译）

黄 金 分 割

玛格丽特　W.马克斯菲尔德

我们的研究从一个值得注意的事实开始：在一个圆柱体中，内接圆锥的体积恰好是圆柱体积的三分之一. 那么，怎样把余下的部分一分为二，使圆柱体积平分为三呢？如图 1 所示：在圆柱内作一个圆台，它包含圆锥在内，并且使得圆台的体积等于圆柱体积的三分之二. 换言之，用一个圆锥的侧面、一个圆台的侧面把圆柱的体积三等分. 圆台的大底面是圆柱、圆锥的共有底面，圆台的小底面在圆柱的另一个底面上、且包含圆锥顶点在内. 我们要确定的是圆台的小底面和圆柱底面相比的收缩因子(相似系数). 当你最终发现收缩因子是多少时，希望你能分享我的惊奇和喜悦.

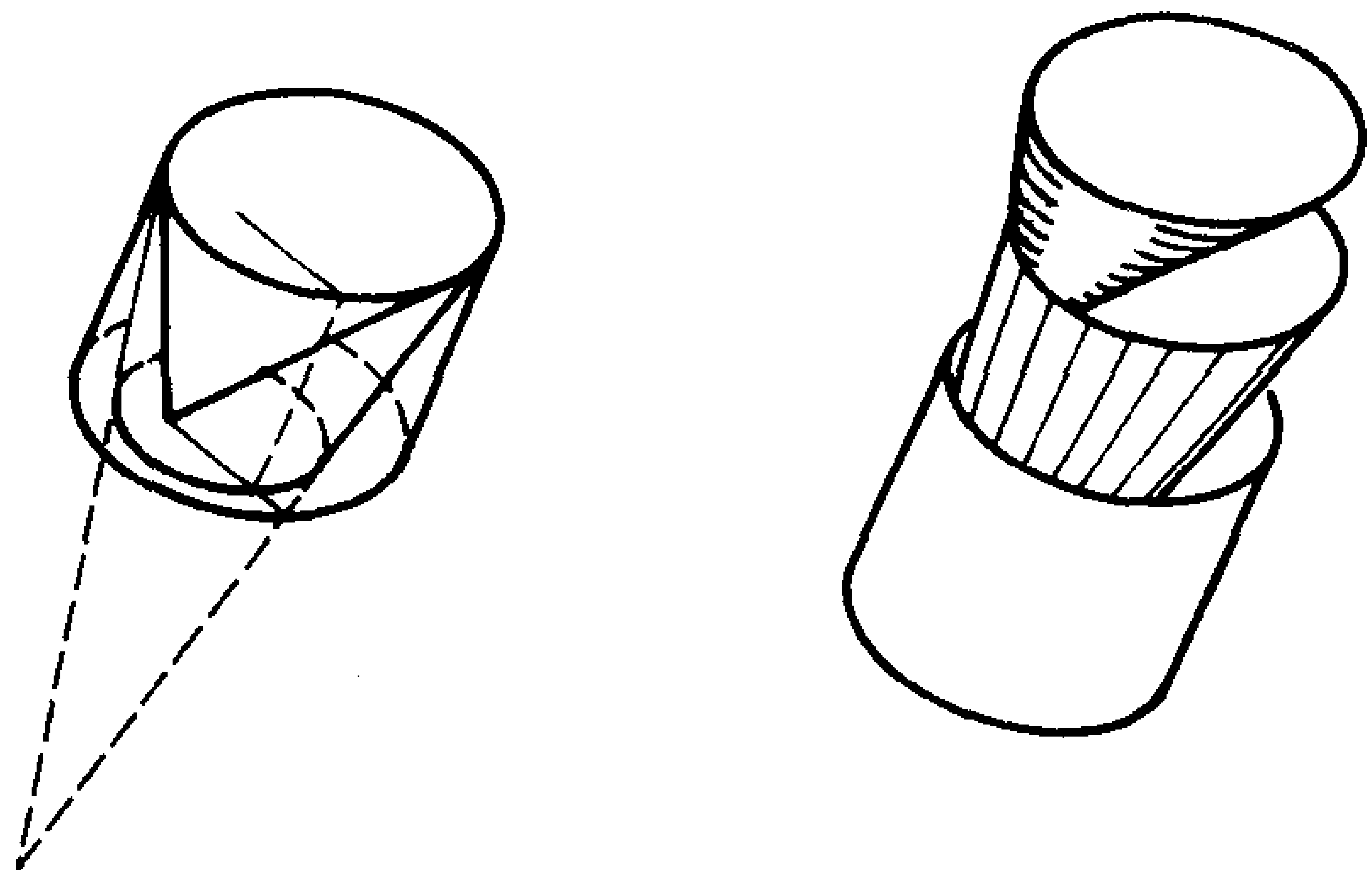


图　1

这一结果适用于一般柱体的任何内接锥体，例如，内接于

棱柱的棱锥，这里，一般柱体的母线不必垂直于底面.

上述圆台或棱台合称平截头台(frustum)，其体积可以用高 a，大底面中基本元素(半径、直径或者边)的长 R，以及相似小底面中基本元素的长 r 三者来表示. 为了导出公式，我们把平截头台画作一个实心锥(全锥体)被平行于底面的平面截去一个“顶锥”而得到的(图 2).

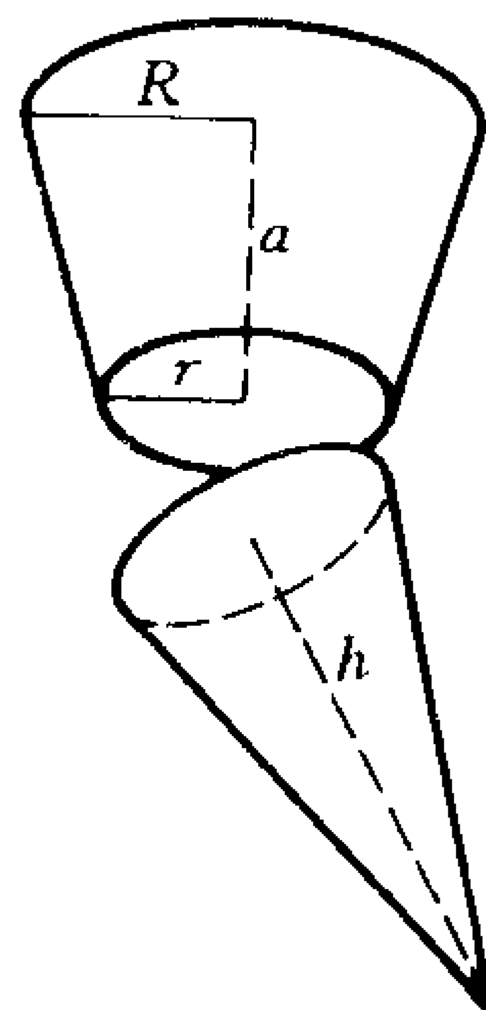


图 2

大底面积与基本元素的长 R 的平方成正比，即为 KR^2. 大锥体的高为顶锥高 h 与平截头台高 a 之和，即为 $h+a$. $R/r=(h+a)/h$，由此导出公式 $h=ar/(R-r)$ 以及 $h+a=aR/(R-r)$，因此，平截头台的体积为

$$KR^2(h+a)/3-Kr^2h/3=Ka(R^3-r^3)/3(R-r)$$
$$=Ka(R^2+Rr+r^2)/3.$$

由三等分条件，它是圆柱体积的三分之二

$$Ka(R^2+Rr+r^2)/3=(2/3)KR^2a$$

由此得

$$R^2-Rr-r^2=0.$$

用 R^2 去除方程的两边，即得 r 与 R 之比所满足的二次方程 $x^2+x-1=0$. 它的正根恰好是著名的“黄金分割”数 $G=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，这就是我们所求的将大底面上的线性尺度化为小底面上的对应尺度的收缩因子.

(宋鸿藻编译，陈维桓校)

参 考 文 献

[1] Verner E. ,Hoggatt Jr. ,Fibonacci and Lucas Numbers,Houghton Mifflin Company,1969.

[2] Garth E. ,Runion,The Golden Section and Related Curicsa,Scott Foresman,1972.

Fourier 十七线问题[①]

B. Turner

著名数学物理学家 J. Fourier 青年时代在写给他的老师和朋友 C. L. Bonard 的一封信中提出下面这样一个几何组合问题:"如何在同一个平面上作 17 条直线,使它们总共恰好有 101 个交点?其中每条直线的两端可以无限延伸,而每个交点只属于两条直线". 我们称它为 Fourier 十七线问题. 由于直线的数目比较大,用直接作图的办法很不容易找到解答. Fourier 建议从考虑一般情形入手,即在同一个平面上作 n 条直线,使它们总共恰好有 m 个交点,其中的每个交点只属于两条直线. 我们简称为 Fourier 问题.

对于同一平面上的 n 条直线,如果它们两两相交,且每一交点只属于两条直线,所得到的交点数应是最大的. 这时第 n 条线上有$(n-1)$个交点,把它移去,别的任意一条线和剩下的线必有$(n-2)$个交点,以此类推,得到交点数的最大值应是

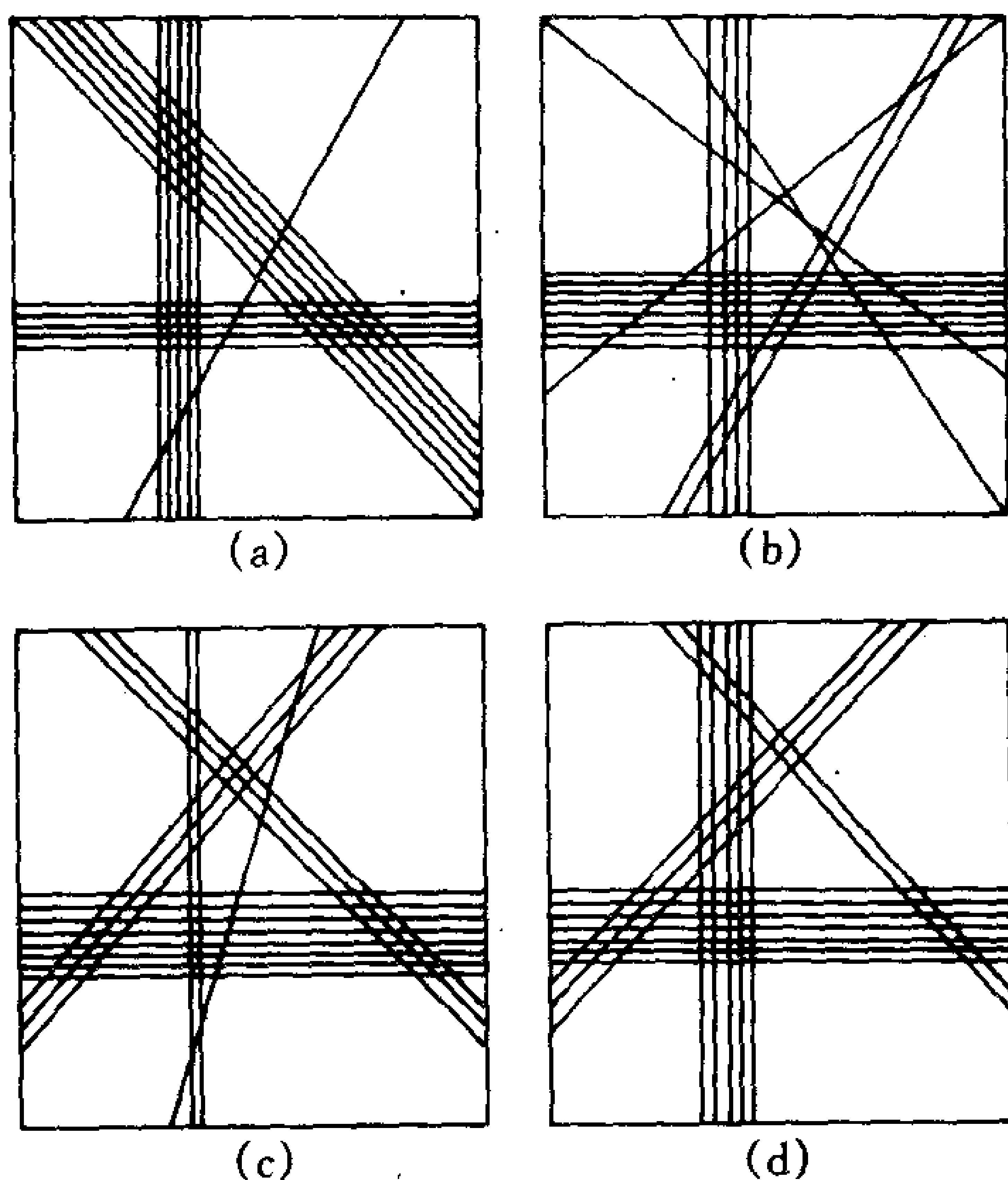
$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=(n-1)n/2.$$

当 $n=17$ 时,最大值是 136.

如果交点数不是最大值,则其中有些线必须平行,因为 Fourier 规定每个交点只属于两条直线. 因此,要使 17 条线只有 101 个交点,则必须有 35 对平行线. 但如果每组平行线只许有两条直线的话,这个问题就没有解. 如果把 101 换成

① 译自"B. Turner, Fourier's Seventeen Lines Problem", *Math. Magazine*, **53**(1980), 217~219.

131，则问题有解．答案是 5 对平行线另加 7 条别的直线．如果每组平行线的线数可以大于 2，则 Fourier 十七线问题有解．例如，作三组线数分别为 5，5，6 的平行线再加一条别的直线，它们就有 101 个交点(图 1(a))．



(a) (b) (c) (d)

图 1　Fourier 十七线问题的四个解

一般地，如果平行直线的总数为 j，隶属于 k 个不同的平行线组，各组的线数分别为 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ ($j_1 + j_2 + \cdots + j_k = j$)，则交点数 m 应为

$$m = j_1 j_2 + (j_1 + j_2) j_3 + \cdots + (j_1 + j_2 + \cdots + j_{k-1}) j_k + \left[\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(j-1)j}{2}\right],$$

其中最后一项是非平行线上的交点数，利用条件 $j = j_1 + \cdots + j_k$ 化简上式，我们得到

$$\frac{(n-1)n}{2}-m=\frac{(j_1-1)j_1}{2}+\frac{(j_2-1)j_2}{2}+\cdots+\frac{(j_k-1)j_k}{2}. \quad (1)$$

此式给出 Fourier 问题有解的一个必要条件：交点数的最大值$(n-1)n/2$ 与指定值 m 的差可以表示为若干个三角数的和.(1)式中的三角数$(j_i-1)j_i/2$ 有这样的几何意义：一个有 j_i 条线的平行线组使交点总数减少$(j_i-1)j_i/2$.

现在 Fourier 十七线问题变成求解方程

$$\frac{(j_1-1)j_1}{2}+\frac{(j_2-1)j_2}{2}+\cdots+\frac{(j_k-1)j_k}{2}=35, \quad (2)$$

其中 $j_1+j_2+\cdots+j_k\leqslant 17$. 显然,如果只有一组或两组平行线,则问题无解,因为 35 既不是三角数也不是两个三角数的和. 为此我们先找出小于 35 的全部三角数. 它们是 1,3,6,10,15,21 和 28(分别对应于线数 $j_i=2,3,4,5,6,7$ 和 8 的平行线组). 再用(2)直接验算,结果发现 Fourier 十七线问题有四个解,其中有两个解使用三组平行线. 图 1(a)是一个解,另一个解用三组线数分别为 2,4 和 8 的平行线外加 3 条别的直线(图 1(b)). 还有两个解使用四组平行线,其中一个用线数分别为 2,3,3 和 8 的平行线组外加一条别的线(图 1(c)),另一个用线数分别为 2,3,5 和 7 的平行线组(图 1(d)). 这是唯一的一个只用平行线组构成的解.

(李世杰编译,朱学贤校)

参 考 文 献

J. Herivel, Joseph Fourier, The Man and Physicist, Clarendon Press, Oxford, 1975.

椭圆的反射性质[①]

W. C. Schule 和 C. G. Moore

反射性质是椭圆的一个十分重要及引起广泛兴趣的性质. 但是,在这一性质的证明中涉及的计算常常是比较繁琐的,本文用导数给出一个简洁的证明以飨读者. 我们的证明基于一个极其简单但非常有用的公式:

$$FP = a - ex \tag{1}$$

其中的 FP 是从椭圆在 x 轴的正半轴上的焦点 F 到椭圆上的点 $P(x,y)$ 的距离,见图 1.

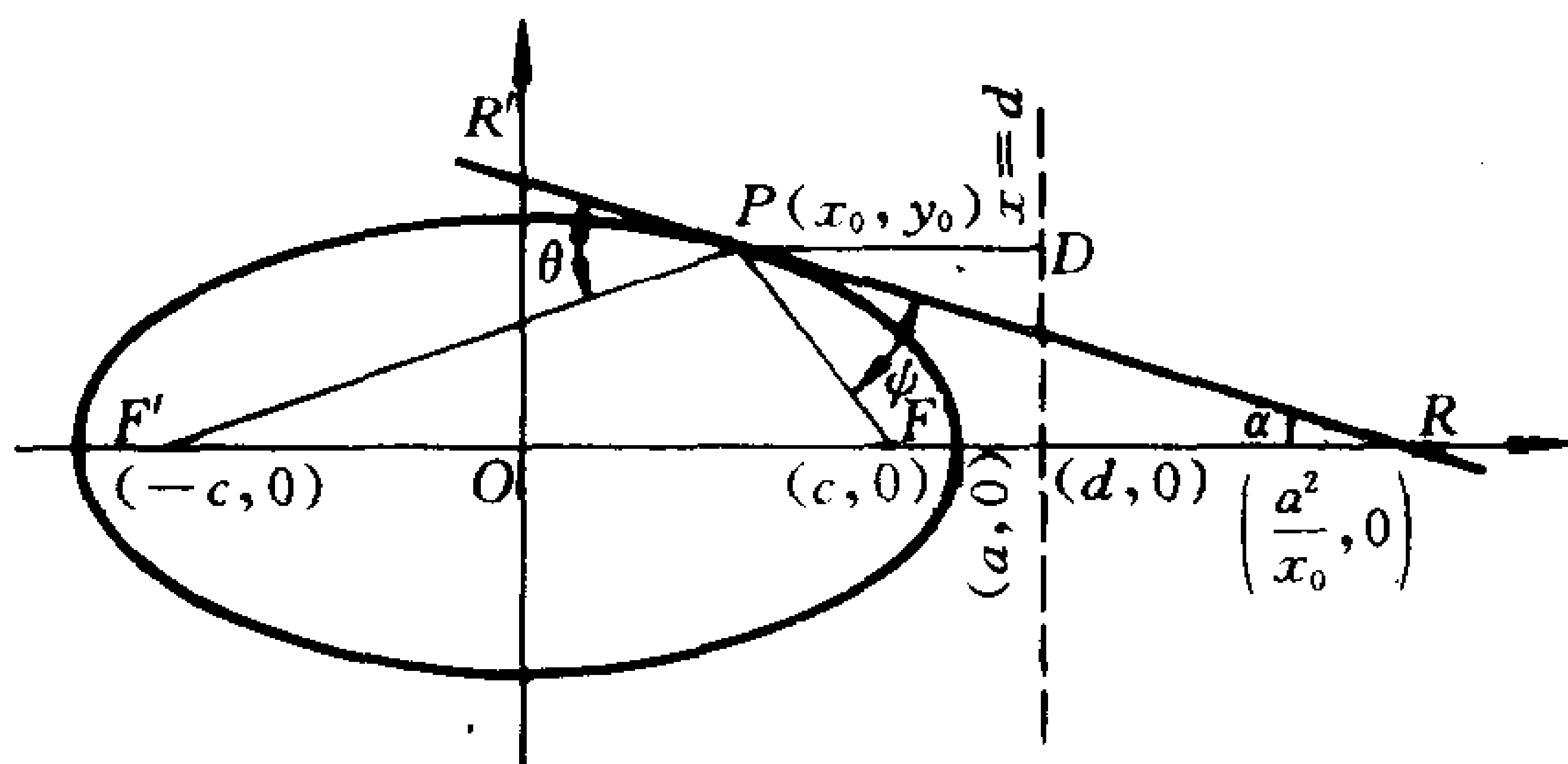


图 1

由熟知的关系式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad b^2+c^2=a^2,\quad \frac{c}{a}=e,$$

① 编译自"Reflections on the Ellipse",*Math. Magazine*, **60**(1987), **3**, 167～168.

很容易推得公式(1). 具体做法如下(见图 1):

$$
\begin{aligned}
(FP)^2 &= (x-c)^2 + y^2 \\
&= x^2 - 2cx + c^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \\
&= \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2cx + c^2 + b^2 \\
&= \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2aex + a^2 \\
&= e^2x^2 - 2aex + a^2 \\
&= (a - ex)^2.
\end{aligned}
$$

两边开方即得(1)式,因为 $x \leqslant a$ 且 $e<1$. 变换 c 的符号,同样的方法可以证得

$$F'P = a + ex, \tag{2}$$

其中 F' 是椭圆在 x 轴的负半轴上的焦点. 当然,(2)式也可以利用公式 $FP+F'P=2a$ 得到.

还可以注意到: 如果熟悉椭圆的焦点与准线之间的关系,即 $FP/PD=e$,则关系式(1)将更容易推得. 因为

$$(a-c)/(d-a) = e,$$

可得

$$d = a/e,$$

所以有

$$FP = ePD = e(d-x) = a - ex.$$

类似可得 $F'P=a+ex$.

反过来,由(1)可立即推出椭圆焦点与准线之间的关系. 实际上,只要令

$$d = a/e,$$

则有

$$FP = a - ex = ed - ex = ePD.$$

现在，我们来推导椭圆的反射性质. 设 $P(x_0, y_0)$是椭圆上的任意一点，RR'是过该点的一条切线，现要证明

$$\angle F'PR' = \angle FPR.$$

椭圆上过 $P(x_0, y_0)$的切线方程是（利用求导）

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

由此推得 R 点的坐标是$(a^2/x_0, 0)$利用 $e=c/a$ 可得

$$FR = \frac{a^2}{x_0} - c = \frac{1}{x_0}(a^2 - aex_0) = \frac{a}{x_0}(a - ex_0) = \frac{a}{x_0}FP, \tag{3}$$

$$F'R = \frac{a^2}{x_0} + c = \frac{1}{x_0}(a^2 + aex_0) = \frac{a}{x_0}(a + ex_0) = \frac{a}{x_0}F'P, \tag{4}$$

其中分别用到了(1)和(2). 在$\triangle FRP$ 中，利用正弦定理并考虑到(3)，得

$$\sin\psi = \frac{FR\sin\alpha}{FP} = \frac{a}{x_0} \cdot \frac{FP\sin\alpha}{FP} = \frac{a}{x_0}\sin\alpha;$$

类似地，考虑$\triangle F'RP$ 并利用(4)，得

$$\sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{F'R\sin\alpha}{F'P} = \frac{a}{x_0} \cdot \frac{F'P\sin\alpha}{F'P} = \frac{a}{x_0}\sin\alpha.$$

于是，$\sin\theta=\sin\psi$. 又因为 $0\leqslant\theta+\varphi\leqslant\pi$，所以 $\theta=\psi$. 遂得所证.

（刘容光编译，朱学贤校）

Desargues 定理的一个应用

约翰·麦克莱里

射影几何最精彩的一个结果是：

Desargues 定理　如果两个三角形从一点看去成透视，那么，它们的对应边延长线的三个交点必定共线.

本文目的是用 Desargues 定理证明欧几里得几何中著名的三圆定理[2,p115].射影几何与欧氏几何的内在联系，使 Desargues 定理经过适当的变形，就成为证明欧氏几何定理的有力工具，这一事实早被法国几何学家 Pončelet[3]等利用.

三圆定理　已知三圆在同一平面上互不相交，互相外离，且半径互异，那么，三对外公切线的三个交点必定共线.

证明　如图 1 所示，令 A，B，C 为三圆中心，首先注意圆心连线通过公切线交点.

考虑落在三角形 ABC 外面的三条外公切线两两相交得到的三角形 $A'B'C'$. 设 P 与 Q 表示中心在 A 点的圆在直线 $A'B'$ 与 $A'C'$ 上的切点，那么三角形 $AA'P$ 与 $AA'Q$ 是全等的直角三角形，因此，AA' 平分角 $B'A'C'$.

同理，BB' 和 CC' 也是三角形 $A'B'C'$ 的角平分线，但一个三角形的角平分线共点，所以，AA'、BB' 与 CC' 交于一点 I. 由此立即得三角形 ABC 与 $A'B'C'$ 关于点 I 成透视，因此，由 Desargues 定理，X，Y 和 Z 三点共线.

还有一个由另外三条外公切线相交而成的三角形落在三角形 ABC 内部，读者利用它，也能得到定理的证明. 当外部

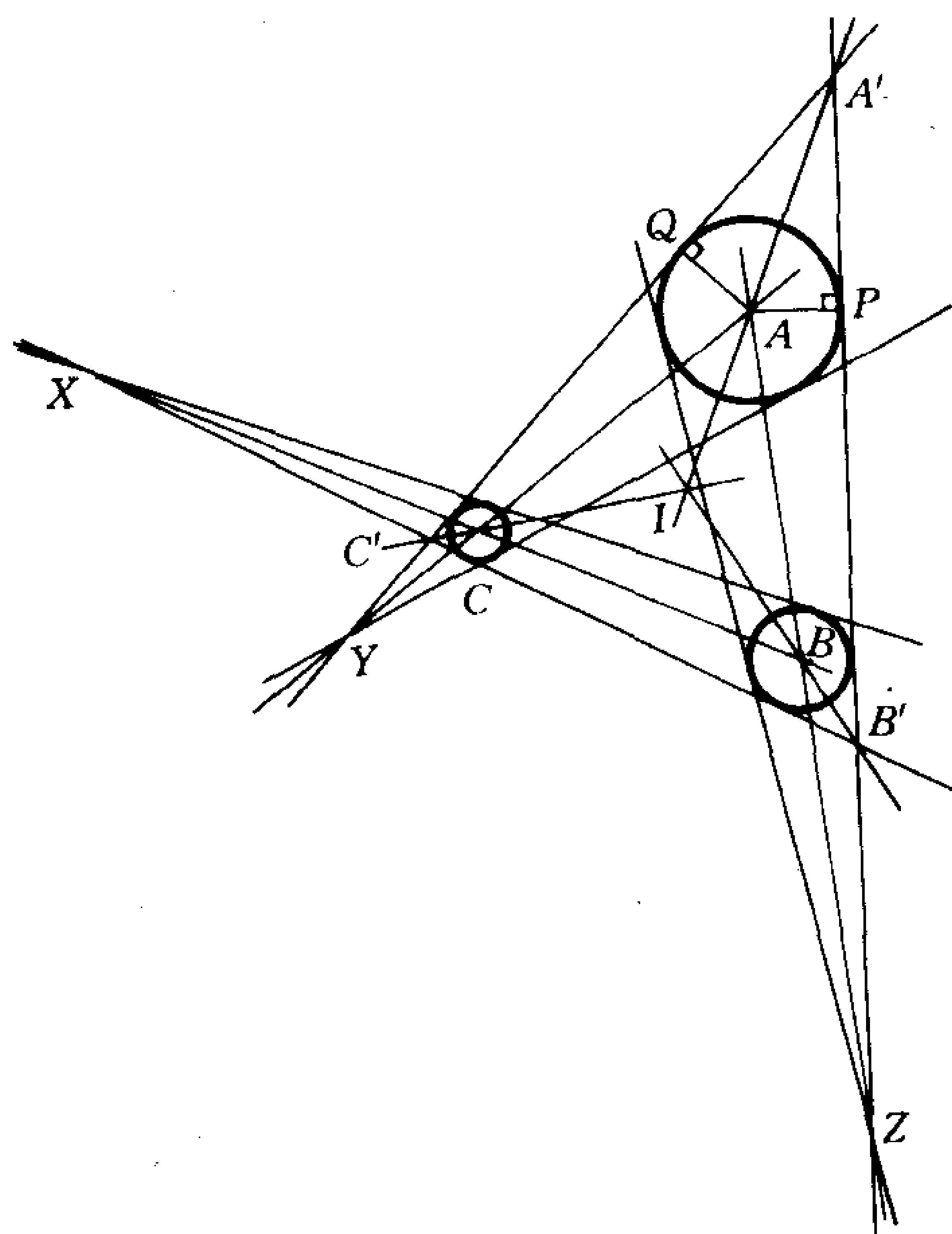


图 1

三角形退化时，可以用内部三角形证明定理. 再进一步，引入内公切线代替外公切线，可以导出新的共线性质，例如，取两对内公切线与一对外公切线的交点即可. 恰当选择相交切线，使上述证明中的理由成立，对应点的共线即可用 Desargues 定理得到证明.

（宋鸿藻、吴报强译，潘承彪校）

参 考 文 献

[1] H. S. M. Coxeter, The Problem of Apollonius, *Amer. Math. Monthly*, **75**

(1968),5～15.

[2] C. Stanley Ogilvy, Excursions in Geometry, Oxford, New York, 1969.

[3] J. V. Poncelet, Applications d'Analyse et de Ge'ometrie, Mallet-Bachelier, Paris, 1862.

怎样证明三角学中的恒等式①

M. S. Klamkin

我上中学时，老师不允许学生简单地通过证明 $A-B\equiv 0$ 来证三角恒等式 $A\equiv B$，而必须把 A 演变成 B 或把 B 演变成 A. 这种限制是没有道理的，因为人们总可以把 A 写成 $A\equiv(A-B)+B$ 的形式，然后只须证得 $A-B\equiv 0$. 尽管建立各种三角恒等式对我是一件很有兴趣且富于竞争性的工作，但许多学生对于这类问题感到困难，因为他们从未学过处理此类问题的方法. 利用这里介绍的算法，学生们会对解这些问题感到有较少的困难. 此外，这类恒等式能通过个人计算机来验证，如果机上已备有符号演算软件的话(这些软件现在已有，见[6].).

证明 $A-B\equiv 0$ 的基础是如下的事实：*每个单变量的三角多项式的恒等式 $P(\cos\theta,\sin\theta)\equiv 0$ 是 $\cos^2\theta+\sin^2\theta\equiv 1$ 的推论.* 对此，Magid[3]给出了一个抽象代数的证明，它是为配合大学生的抽象代数课而提出的. 后来，为了使这个结果更加易于理解，Dobbs[2]给出了一个较为初等的证明. 我们在这里简化 Dobbs 的证明，给出他的方法的一个变形，并在最后给出几个推广的结果.

单变量的三角恒等式

Dobbs 证明的实质是：若含有两个变量 C 和 S 的多项

① 编译自"On Proving Trigonometric Identities", *Math. Magazine*, **56** (1987), 215～220.

式 $P(C,S)$，对满足 $C^2+S^2=1$ 的所有实数 C,S 都为零，则

$$P(C,S)=(C^2+S^2-1)Q(C,S), \qquad (1)$$

式中 Q 也是含有 C,S 的多项式. 为了证明(1)，Dobbs 将 $P(C,S)$ 看作是一个变量 C 的多项式，并用 C 的二次式 C^2+S^2-1 去除，由单变量 C 的多项式带余式除法得到 $P(C,S)=(C^2+S^2-1)Q(C,S)+A(S)C+B(S)$，其中 A,B 是 S 的多项式. 这样，由 $C^2+S^2-1=0$ 就推出

$$A(S)C+B(S)\equiv 0. \qquad (2)$$

现在我们来简化 Dobbs 证明中的余下部分，那就是证明 $A(S)$ 和 $B(S)$ 都恒等于 0. 如果 $C^2+S^2=1$，那么由(2)得出，对满足 $-1\leqslant S\leqslant 1$ 的所有 S，有

$$A(S)\sqrt{1-S^2}+B(S)\equiv 0,$$

$$-A(S)\sqrt{1-S^2}+B(S)\equiv 0;$$

由此

$$A(S)\sqrt{1-S^2}\equiv B(S)\equiv 0.$$

因为 $A(S)$ 和 $B(S)$ 是对 S 取无穷多个值时都等于 0 的多项式，所以它们都必须各恒等于 0(这可由代数基本定理的一个推论推出).

$A(S)$ 和 $B(S)$ 必恒等于 0 的这一事实，为学生们提供了几个验证多项式三角恒等式的算法(通过手算或计算机的符号演算). 现介绍如下：假定我们要证明的三角恒等式已表示为 $P(C,S)\equiv 0$ 的形式，其中 $C=\cos x$，$S=\sin x$(如果恒等式是 $\cos x,\sin x,\operatorname{ctg} x,\operatorname{tg} x,\csc x$ 和 $\sec x$ 的有理函数，就先作下列代换：

$$\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x},$$

再通过乘以最小公分母，把所得的 C 和 S 的有理函数变换成多项式函数.).

方法 I (Dobbs) 将多项式整理成关于变量 C 的标准形式

$$P(C,S) = A_0(S)C^n + A_1(S)C^{n-1} + \cdots + A_n(S),$$

再用 C^2+S^2-1 去除[1]. 如果 $P(C,S)=0$ 是一个恒等式，那就将没有余项，且反之亦然.

方法 II 总可以用 C 和 S 的奇函数和偶函数把 $P(C,S)$ 表示为如下多项式形式：

$$P(C,S) = F(C^2,S^2) + G(C^2,S^2)C + H(C^2,S^2)S + I(C^2,S^2)CS.$$

如前所述，$P(C,S)\equiv 0$ 的充要条件(为什么)

$$F(C^2,S^2) \equiv 0, \quad G(C^2,S^2) \equiv 0,$$

$$H(C^2,S^2) \equiv 0, \quad I(C^2,S^2) \equiv 0.$$

对这四个函数的每一个我们应用方法 I. 用不同奇偶性的函数将 P 拆开是容易做到的，并且可化简随后要做的代数除法.

方法 III 这里用 $1-S^2$ 代替 C^2，并证明 $F(1-S^2,S^2)$，$G(1-S^2,S^2)$，$H(1-S^2,S^2)$，$I(1-S^2,S^2)$的每一个都恒等于 0. 这可以这样来做：展开 $F(1-S^2,S^2)$等各函数并以次数递减或递增的顺序整理各项，然后判定 S^2 的每个幂的系数为 0.

不一定要把 $P(C,S)$作如前一样的全部变形，我们也可

---

① 代数基本定理是每个复系数多项式必有一复根.

以表示为

$$P(C,S) \equiv F_1(C^2,S) + G_1(C^2,S)C,$$

或者

$$P(C,S) \equiv F_2(C,S^2) + G_2(C,S^2)S,$$

然后再按前述办法处理.

例如,考虑恒等式

$$\begin{aligned}4\cos x + (1+\sin x)^2 + \csc x\cos^2 x(1 + 2\csc x\cos x)\\ + \sec x\sin^2 x(\sec x\sin^2 x + \sec x\sin x + 2)\\ = \sec x(2\csc^2 x + \sec x\csc x + \sec x).\end{aligned}$$

用 $\cos x$ 和 $\sin x$ 表示其中所有的函数,并以 $C=\cos x, S=\sin x$ 把它转换为多项式,此时恒等式变为

$$\begin{aligned}\{C^2S^2(1+S^2)+S^6-S^2\} + 2C\{C^4+2C^2S^2+S^4-1\}\\ + S\{C^4+2C^2S^2+S^4-1\} = 0.\end{aligned}$$

以 $1-S^2$ 替换上式三个花括号中的 C^2,就可得到每个花括号中的表达式都恒等于 0,例如

$$\begin{aligned}(1-S^2)S^2(1+S^2)+S^6-S^2\\ = S^2(1-S^4)+S^6-S^2 = 0.\end{aligned}$$

这就证明了原来的三角恒等式成立.

多个变量的三角恒等式

作为(1)的推广,我们将证明,如果 $P(\cos A,\sin A,\cos B,\sin B)=0$ 是一个多项式三角恒等式,那么多项式 $P(C,S,C_1,S_1)$ 有如下形式:

$$\begin{aligned}P(C,S,C_1,S_1) = (C^2+S^2-1)Q(C,S,C_1,S_1)\\ + (C_1^2+S_1^2-1)R(C,S,C_1,S_1) \quad (3)\end{aligned}$$

其中 Q 和 R 也是四个变量 C,S,C_1,S_1 的多项式. 如前一样,

由多项式的带余式除法知

$$P(C,S,C_1,S_1)=(C^2+S^2-1)Q(C,S,C_1,S_1)$$
$$+A(S,C_1,S_1)C+B(S,C_1,S_1).$$

因为如果 $C^2 \pm S^2=1$ 和 $C_1^2+S_1^2=1$，则 P 等于 0，所以 $A(S,C_1,S_1)C+B(S,C_1,S_1)$ 也必须等于 0. 然后再根据以前同样的理由，A 和 B 也必等于 0. 仍再如前述，这又意味着 A 和 B 必可被 $C_1^2+S_1^2=1$ 整除，由此给出了所需的结果(3). 这样我们就得到了一个用来建立形如 $P(C,S,C_1,S_1)=0$ 的恒等式的算法：首先将 C^2+S^2-1 去除 P 得到余式

$$A(S,C_1,S_1)C+B(S,C_1,S_1).$$

然后对每一个多项式 A 和 B，由于 $C_1^2+S_1^2=1$，所以它们的每一项 $S^r(r=0,1,\cdots)$ 的系数(它们是含 C_1,S_1 的多项式)必为 0. 这些可和讨论一个变量的多项式三角恒等式的情形同样证明. 此外，我们也可用类似于方法Ⅲ的方式来处理.

由几何中的三角形恒等式可得到两个变量的三角恒等式的大量例子. 例如，

$$\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y+\mathrm{tg}z=\mathrm{tg}x\mathrm{tg}y\mathrm{tg}z, \qquad (4)$$

$$\sin x+\sin y+\sin z=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}, \qquad (5)$$

$$\sin^3x\cos(y-z)+\sin^3y\cos(z-x)+\sin^3z\cos(x-y)$$
$$=3\sin x\sin y\sin z. \qquad (6)$$

以 $\pi-x-y$ 代 z，上述恒等式变为

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}-\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$$
$$=-\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin y}{\cos y}\cdot\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}, \qquad (4)'$$

$$\sin x+\sin y+\sin(x+y)=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\sin\frac{x+y}{2}, \qquad (5)'$$

$$\sin^3(x+y)\cos(x-y)-\sin^3 x\cos(2y+x)$$
$$-\sin^3 y\cos(2x+y)=3\sin x\sin y\sin(x+y). \quad (6)'$$

这里为了使用我们的算法来证明它们，必须先把这些恒等式转换为以变量 $C=\cos kx, S=\sin kx, C_1=\cos ky, S_1=\sin ky$ 的多项式等式，这里 k 要做适当的选择. 为此，我们还需用到另外的公式，即

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x,$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y.$$

通常这并不是一个有效的方法，但至少是直接可行的. 例如，通过把项数做适当的组合，(4)′就变得简单多了. 即

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}\left\{1-\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}\right\},$$

于是

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}\cdot\frac{\cos(x+y)}{\cos x\cos y}.$$

对(5)′选取 k 为 1/2，有

$$2SC+2S_1C_1+2(SC_1+S_1C)(CC_1-SS_1)$$
$$=4CC_1(SC_1+S_1C). \quad (5)''$$

于是(5)″简化为

$$SC(1-S_1^2-C_1^2)+S_1C_1(1-S^2-C^2)=0.$$

第三个例子(6)′更复杂些，(k 取为 1)变为

$$S^3CC_1^4+3S^2C^2S_1C_1^3+3SC^3S_1^2C_1^2+C^4S_1^3C_1+S^4S_1C_1^3$$
$$+3S^3CS_1^2C_1^2+3S^2C^2S_1^3C_1+SC^3S_1^4-2S^3CC_1^2+S^3C$$
$$+2S^4C_1S_1-2C^2S_1^3C_1+S_1^3C_1+2SCS_1^4$$
$$=3S^2S_1C_1+3SS_1^2C. \quad (6)''$$

为了建立(6)″，只要以 $1-S_1^2$ 替代 C_1^2(但不替代 C_1)，$1-S^2$ 替代 C^2(但不替代 C)，每一项就都消掉了. 然而，通过拆分偶数

项和奇数项，(6)″也能像前边一样划分为几个子恒等式. 这可由 $P(C,S,C_1,S_1)$ 表为如下形式来证明：

$$\begin{aligned}P(C,S,C_1,S_1) &= Q(C^2,S,C_1,S_1) + R(C^2,S,C_1,S_1)C \\ &= Q_1(C^2,S,C_1^2,S_1) + Q_2(C^2,S,C_1^2,S_1)C_1 \\ &\quad + (R_1(C^2,S,C_1^2,S_1) + R_2(C^2,S,C_1^2,S_1)C_1)C.\end{aligned}$$

同前一样，对于 $C^2+S^2=1$ 及 $C_1^2+S_1^2=1$，就有各个 Q_1,Q_2,R_1 和 R_2 必然等于 0.

在(6)″中，没有哪一项含有 $C^{2m}C_1^{2n}$（偶-偶）或 $C^{2m+1}C_1^{2n+1}$（奇-奇）形式的因子. 对含有奇-偶或偶-奇的项，除以公因子后，分别有

$$\begin{aligned}&S^2C_1^4 + 3C^2S_1^2C_1^2 + 3S^2S_1^2C_1^2 + C^2S_1^4 \\ &\qquad - 2S^2C_1^2 + S^2 + 2S_1^4 - 3S_1^2, \\ &S_1^2C^4 - 3C_1^2S^2C^2 + 3S_1^2S^2C^2 + C_1^2S^4 \\ &\qquad - 2S_1^2C^2 + S_1^2 + 2S^4 - 3S^2,\end{aligned}$$

它们是等价的表达式. 以 $1-S^2$ 代 C^2 和以 $1-S_1^2$ 代 C_1^2 后两者都恒等于 0.

我们不仅能把三角恒等式化成形如 $P(C,S,C_1,S_1)=0$ 的多项式恒等式，而且这个过程也可以颠倒过来，这是得到各种三角形恒等式的一个无穷无尽的源泉. 首先设 $C_i=\cos x_i$，$S_i=\sin x_i$，$i=1,2,3$，这里 x_1,x_2,x_3 是一个三角形的三个内角. 因此，$x_1+x_2+x_3=\pi$，且

$$\begin{aligned}&C_3 = S_1S_2 - C_1C_2,\ C_1 = S_2S_3 - C_2C_3,\ C_2 = S_3S_1 - C_3C_1, \\ &S_3 = S_1C_2 + S_2C_1,\ S_1 = S_2C_3 + S_3C_2,\ S_2 = S_3C_1 + S_1C_3. \qquad (7)\end{aligned}$$

现在我们以两个任意多项式 F 和 G 开始来给出恒等式

$$P(C_1,S_1,C_2,S_2) = (C_1^2 + S_1^2 - 1)F(C_1,S_1,C_2,S_2)$$

$$+ (C_2^2 + S_2^2 - 1)G(C_1, S_1, C_2, S_2) \equiv 0.$$

最后，只需用(7)中相应的式子代替$(C_1^2+S_1^2-1)$或$(C_2^2+S_2^2-1)$中的部分或全部变量C_1, S_1, C_2, S_2. 上述恒等式不是循环的，但是如果我们要求它们是循环的，则我们只要写

$$\begin{aligned}(C_1^2 + S_1^2 - 1)&F_1(C_2, S_2, C_3, S_3)\\ &+ (C_2^2 + S_2^2 - 1)F_2(C_2, C_3, C_1, S_1)\\ &+ (C_3^2 + S_3^2 - 1)F_3(C_1, S_1, C_2, S_2) \equiv 0\end{aligned}$$

等等. 作为特例，有

$$\begin{aligned}\sum \{(S_2C_3 + S_3C_2)^2 + (S_2S_3 - C_2C_3)^2 - 1\}\\ \times \{(S_2S_3)^2 + (C_2C_3)^2 + 1\} \equiv 0.\end{aligned}$$

其中求和号是对$S_1, S_2, S_3, C_1, C_2, C_3$循环取值来求和.

因子分解结果的推广

假若$P(x,y)$和$Q(x,y)$是含两个变量的多项式，对于无限多个数对(x_i, y_i)，它们的值均等于0，那么这两个多项式必有一个公共的多项式因子. 这个结论可从一个已知的结果[3, p. 210]推出来，但它也可用关于两个变量的多项式的最大公因式的算法给以证明.

定理 1 假若$P(x,y)$和$Q(x,y)$是两个互素的多项式，则仅存在有限个数对(x_i, y_i)使P和Q都等于零.

此定理的几何意义是：两条平面代数曲线$P(x,y)=0$，$Q(x,y)=0$，若当它们有无穷多个交点，则它们就必共有一条完整的代数曲线. 至于定理1中的确切的数对(x_i, y_i)的个数，有如下定理：

Bezout 定理[4]① 如果互素多项式$P(x,y)$和$Q(x,y)$的

---

① 这是代数几何中的一个基本定理.

次数分别是 m 次和 n 次，则使 P 和 Q 都等于 0 的实的或复的交点 (x_i, y_i) 的个数(按重数计算)是 mn.

由 Bezout 定理可导出如下三个结果：

(i) 方程 $x+y=0$ 和 $x^2+y^2=0$ 仅在点 $(0,0)$(作二重计数)同时成立.

为了理解二重根，可考虑直线 $x+y=0$ 和圆 $x^2+y^2=r^2$ 的交点，当 $r\to 0$ 时两交点趋于重合，所以是二重交点.

(ii) 两条二次曲线至多交于 4 个实交点.

(iii) 如果一个正 n 边形 $(n>4)$ 内接(或外切)于一个椭圆，则该椭圆为这个 n 边形的外接圆(或内切圆).

如若不然，这椭圆与这个外接圆(或内切(椭)圆)的交点数至少是 n，由(ii)可知这是不可能的. 对 $n=4$ 的情形，可证明对于任何一个真椭圆存在唯一的一个内接(或外切)正方形.

定理 1 的一个直接推论如下：

推论 设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 是含两个变量的多项式，且 $Q(x,y)$ 不可约(在复数域上). 如果 P 在使 Q 等于 0 的所有点 (x_i, y_i) 上(实的和复的)等于 0，则 Q 是 P 的一个因子.

这个推论对有两个以上变量的多项式也适用，虽则此时定理 1 却是无效的[3,p. 213]. 为了说明这种情况下定理 1 无效，只要注意 $P(x,y,z)=0$ 和 $Q(x,y,z)=0$ 是两个曲面，通常它们相交于一条曲线. 还应注意推论中的不可约性的条件是重要的，说明这一点只要考虑 $Q(x,y)=xy^2$ 和 $P(x,y)=x^2y$ 的情形即可.

再应注意推论中所述的零点可以是实的也可以是复的. 而在前面讨论核心恒等式 $P(C,S)\equiv 0$ 时，我们仅考虑了使 $C^2+S^2=1$ 的所有实点 (C,S). 这种仅为实点的限制与其有本

质上的区别.例如,如果在使不可约多项式

$$Q(x,y,z)=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^4$$

等于 0 的所有实点或复点上 $P(x,y,z)$ 都等于 0,则多项式 Q 是 P 的一个因子.然而如果限制仅在使 Q 等于 0 的所有实点上 P 等于 0,则 P 不一定能被 Q 整除(例如 P 可以是多项式 $x-y$).这就导致了下述尚未解决的问题.

问题 刻画这样的不可约多项式 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$(在复数域上)的特性:对任一多项式 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,若在所有使 Q 等于 0 的实数 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 上必有 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 等于 0,那么 Q 必能除尽 P.

现在来证明一个这种类型的多项式:

$$Q(x_1,\cdots,x_n)=x_1^m+x_2^m+\cdots+x_n^m-1, \tag{8}$$

其中 $n\geqslant 2,m=1,2,\cdots$.我们知道多项式 $x_1^m+x_2^m+\cdots+x_r^m(r\geqslant 3)$ 是不可约的[4].由此容易推出(8)中的 Q 也是不可约的.以下的证明用归纳法,我们首先证明当 $n=2$ 时结果成立(这种情况包含了 Magid 和 Dobbs 的结果).

假定 $Q(x_1,x_2)$ 如(8)所设,且某个其他的多项式 $P(x_1,x_2)$ 对所有使 Q 等于 0 的实点 (x_1,x_2) 也都等于 0.用 Q 除 P,得到

$$P(x_1,x_2)=(x_1^m+x_2^m-1)P_0(x_1,x_2)$$
$$+x_1^{m-1}P_1(x_2)+x_1^{m-2}P_2(x_2)+\cdots+P_m(x_2).$$

我们来证明所有多项式项 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 必恒等于 0.对满足 $0\leqslant x_2\leqslant 1$ 的所有 x_2 以及 $x_1=(1-x_2^m)^{1/m}$,有

$$x_1^{m-1}P_1(x_2)+x_1^{m-2}P_2(x_2)+\cdots+P_m(x_2)=0. \tag{9}$$

如果令(9)中的 $x_2=1$,则 $x_1=0$,所以 $1-x_2$ 是 $P_m(x_2)$ 的一个因子.在每一个 P_i 中提出所有的 $1-x_2$ 因子.注意到这 m 个项中每一个的因子 $1-x_2$ 的次数必都不同,所以其中的前

$m-1$个是非整数. 现从全部项中提出最低次数的因子$(1-x_2)^d$,以使这些项中确实有一项没有$1-x_2$因子. 因而(9)式为

$$(1-x_2)^d[(1-x_2)^e R(x_2)+R_j(x_2)],\qquad(10)$$

这里$(1-x_2)^d R_j(x_2)=(1-x_2^m)^{(m-j)/m}P_j(x_2)$,且$d,e$是正有理数. 设$x_2=1-\varepsilon,\varepsilon>0$任意小. 由连续性,(10)中各项之和不能为0. 因而,不含有$1-x_2$因子的项R_j必恒等于0(因此P_j也恒等于0). 以此类推,可知所有其余项P_i也恒等于0.

假定该结果对$n=2,3,\cdots,k$成立,我们来证明$n=k+1$时结果也成立. 此时,

$$P(X)=Q_{k+1}P_0(X)+x_1^{m-1}P_1(X')+x_1^{m-2}P_2(X')+\cdots+P_m(X'),$$

其中X,X'分别指变量集$x_1,x_2,\cdots,x_{k+1};x_2,x_3,\cdots,x_{k+1}$,并且$Q_{k+1}(X)=x_1^m+x_2^m+\cdots+x_{k+1}^m-1$. 那么对所有使$Q_{k+1}=0$的实$X$,

$$x_1^{m-1}P_1(X')+x_1^{m-2}P_2(X')+\cdots+P_m(X')=0.$$

令$x_1=0$,则对所有使得$x_2^m+x_3^m+\cdots+x_{k+1}^m=1$的$X',P_m(X')=0$. 这样,由归纳法假设,$P_m(X')$可被$1-x_2^m-x_3^m-\cdots-x_{k+1}^m$或$X_1^m$整除. 令$x_1^m=\varepsilon$($\varepsilon$任意小),同$n=2$的情况一样,可推出所有的$P_i$必恒等于0. 因而,$Q_{k+1}$可整除$P(X)$. 由归纳法,对所有$n\geqslant2$,我们的结果成立.

最后,以类似的归纳方法,可更一般地证明:如果对所有

$$Q_i(X_i)=x_{i_1}^{\alpha(i)}+x_{i_2}^{\alpha(i)}+\cdots+x_{i_{m(i)}}^{\alpha(i)}-1=0$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

的$X_1,X_2,\cdots,X_n$的实值同时使多项式$P(X_1,X_2,\cdots,X_n)$等于0,其中$m(i)\geqslant2$且$\alpha(i)$是正整数,则

$$P = Q_1P_1 + Q_2P_2 + \cdots + Q_nP_n,$$

其中 P_j 是含所有 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的多项式.

(刘燕译,潘承彪校)

参 考 文 献

[1] M. Bocher, Introduction to Higher Algebra, Macmillan, New York, 1935.

[2] D. E. Dobbs, Proving trig. identities to fresh persons, *The MATYC J.*, **14** (1980), 39~42.

[3] A. R. Magid, Trigonometric identities, *this Magazine*, **47** (1974), 226~227.

[4] J. A. Tyrrell, Problem 475, *this Magazine*, **35** (1962), 310.

[5] R. J. Walker, Algebraic Curves, Dover, New York, 1950, pp. 59, 111.

[6] H. S. Wilf, The disk with the college education, *Amer. Math. Monthly*, **89** (1982), 4~8.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的收敛和发散[①]

T. Coben, W. J. Knight

本篇短文包含了关于调和级数发散的一个非常简单的证明，知道它的人并不多.

用反证法. 假设调和级数

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

收敛到 S，则显见由偶数项组成的级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$$

必收敛到$\frac{1}{2}S$，从而推得由奇数项组成的级数

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$$

也必收敛到$\frac{1}{2}S$，但这是不可能的，因为

$$\frac{1}{1}>\frac{1}{2},\frac{1}{3}>\frac{1}{4},\frac{1}{5}>\frac{1}{6},\cdots$$

矛盾！因此调和级数发散.

上述证明如此简单，以致普通高中生都能理解并使用.

---

① 编译自"Convergence and divergence of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$", *Math. Magazine*, 52 (1979), 178.

应用上述证明方法,我们很容易建立级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}(p > 1)$ 的收敛性.

记 S_N 是该级数的前 N 项部分和. 则

$$
\begin{aligned}
S_{2N+1} &= 1 + \left[\frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{(2N)^p}\right] \\
&\quad + \left[\frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} + \cdots + \frac{1}{(2N+1)^p}\right] \\
&< 1 + \left[\frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{(2N)^p}\right] \\
&\quad + \left[\frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{(2N)^p}\right] \\
&= 1 + \frac{1}{2^p}S_N + \frac{1}{2^p}S_N \\
&< 1 + 2^{1-p}S_{2N+1},
\end{aligned}
$$

因为 $S_N < S_{2N+1}$. 由上式得

$$(1 - 2^{1-p})S_{2N+1} < 1.$$

因为 $p > 1$,所以 $1 - 2^{1-p} > 0$,从而有

$$S_{2N+1} < (1 - 2^{-p})^{-1}, \forall N;$$

又因为 $S_{2N} < S_{2N+1}$,所以我们看到单调递增序列 $\{S_n\}$ 有上界 $(1 - 2^{1-p})^{-1}$,从而 $\lim_{n \to \infty} S_n$ 存在.

最后,当 $p < 1$ 时,将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 与调和级数比较,即可得它的发散性.

(朱学贤编译)

算术平均值和几何平均值不等式的一个新证明[①]

本篇短文给出熟知的算术平均值和几何平均值不等式的一个十分简单的初等证明.

引理 设 $x_k \geqslant 0 (k=1,2,\cdots,n)$,则有

$$x_k^k \geqslant [kx_k - (k-1)x_{k-1}]x_{k-1}^{k-1}, \tag{1}$$

其中的等号成立当且仅当 $x_k = x_{k-1} (k=2,3,\cdots n)$.

证明 由因式分解得

$$x_k^k - x_{k-1}^k = (x_k - x_{k-1})(x_k^{k-1} + x_k^{k-2}x_{k-1} + \cdots + x_{k-1}^{k-1}). \tag{2}$$

若 $x_k \geqslant x_{k-1}$,则有

$$x_k^{k-1} + x_k^{k-2}x_{k-1} + \cdots + x_{k-1}^{k-1} \geqslant kx_{k-1}^{k-1}, \tag{3}$$

且等号成立当且仅当 $x_k = x_{k-1}$. 代入(2)式得

$$x_k^k - x_{k-1}^k \geqslant (x_k - x_{k-1}) \cdot kx_{k-1}^{k-1}, \tag{4}$$

移项后即得(1)式;若 $x_k \leqslant x_{k-1}$,则(3)中的不等号反向,但注意到 $x_k - x_{k-1} \leqslant 0$,因此(4)式,从而(1)式仍成立. 引理证得.

定理 如果 $x_k \geqslant 0 (k=1,2,\cdots,n)$,则有不等式

$$x_n^n \geqslant x_1(2x_2 - x_1)(3x_3 - 2x_2)\cdots(nx_n - (n-1)x_{n-1}), \tag{5}$$

其中的等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

用(1)式中的递推关系,马上可得定理的证明.

---

① 编译自 M. Bencze 和 N. Schaumberger 的"A New Proof of the Arithmetic-Geometric Mean Inequality",*Math. Magazine*,**66**(1993),245.

在(5)式中，令 $x_k=(a_1+a_2+\cdots+a_k)/k, a_k\geqslant 0, k=1,2,\cdots,n$，即得

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

其中的等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$. 此即熟知的算术平均值和几何平均值不等式.

（朱学贤编译）

算术平均值和几何平均值不等式的推广[①]

D. E. Daykin 和 C. J. Eliezer

在本篇短文中，希腊字母 $\alpha,\beta,\cdots$ 表示实数，小写英文字母 $a,b,\cdots$ 表示正实数，而大写英文字母 $M,N,\cdots$ 表示正整数或函数.

所谓的算术平均值和几何平均值不等式是

$$\sqrt[M]{a_1a_2\cdots a_M}\leqslant(a_1+a_2+\cdots+a_M)/M,$$

其中的等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_M$. 它的一个熟知的推广是：如果 $p_1+p_2+\cdots+p_M=1$，则有

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_M^{p_M}\leqslant p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_Ma_M, \qquad (1)$$

等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_M$.

在证明不等式的时候，最令人感兴趣的是去构造一个函数具有某种性质(例如是凸的)，并使它的取值从不等式左边的值光滑地递增到不等式右边的值. 下文为这一观点提供了一个很好的例证. 我们构造的函数类见引理 1.

引理 1 函数

$$F(x)=\sum_{I=1}^{M}a_Ib_I^{\alpha_Ix}$$

是严格凸的，而且仅当对于 $I=1,2,\cdots,M$，或 $\alpha_I=0$ 或 $b_I=1$ 时它是常数函数.

结论的证明是极其简单的，因为

① 编译自"Generalizations of the A. M. and G. M. inequlity"，*Math. Magazine*，**40**(1967)，247～250.

$$\frac{\mathrm{d}^2 F(x)}{\mathrm{d}x^2} = \sum_{I=1}^{M} a_I b_I^{\alpha_I x} (\alpha_I \log b_I)^2 \geqslant 0.$$

现在考虑形如 $F(x)$的一个特殊例子 $G(x)$：

$$G(x) = (a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_M^{p_M})^x \sum_{I=1}^{M} p_I a_I^{1-(p_1+p_2+\cdots+p_M)x}.$$

显见

$$G(0) = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_M a_M, \tag{2}$$

及当 $p_1+p_2+\cdots+p_M=1$ 时，有

$$G(1) = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_M^{p_M}. \tag{3}$$

因此，对于推广的算术平均值和几何平均值不等式(1)，重要的是求凸函数 $G(x)$的最小值，此即

定理 1 设 $G(x)$在 $x=x_0$ 处取到最小值，令 $p=p_1+p_2+\cdots+p_M$，则有

(i) $0<x_0<1$，如果 $p>1$；

(ii) $x_0=1$，如果 $p=1$； (iii) $x_0>1$，如果 $p<1$.

(注意 $p>0$，见本文一开始的说明.)

利用等式(2)和(3)，由定理 1 可以得到不等式(1)的许多推广. 例如，由 $G(0)<G(-1)$引出的一个有意思的结果是

$$(a_1^{p_1} \cdots a_M^{p_M})(p_1 a_1 + \cdots + p_M a_M) < p_1 a_1^{1+p} + \cdots + p_M a_M^{1+p}.$$

为证明定理 1，我们引进下面的引理，这一引理本身也很有用.

引理 2 设

$$P(\alpha) = (a_1^{p_1} \cdots a_M^{p_M})^{p_1 a_1^{\alpha} + \cdots + p_M a_M^{\alpha}},$$

$$Q(\alpha) = (a_1^{p_1 a_1^{\alpha}} \cdots a_M^{p_M a_M^{\alpha}})^{p_1 + \cdots + p_M}.$$

则除了 $a_1=a_2=\cdots=a_M$ 的情形外，有

(i) $P(\alpha)<Q(\alpha)$，如果 $\alpha>0$；

(ii) $P(\alpha)=Q(\alpha)$，如果 $\alpha=0$；

(iii) $P(\alpha)>Q(\alpha)$，如果 $\alpha<0$.

特别地，在引理 2 中如果取 $p_1=p_2=\cdots=p_M=\alpha=1$，则得 $(a_1\cdots a_M)^{a_1+\cdots+a_M}<(a_1^{a_1}\cdots a_M^{a_M})^M$ 除非 $a_1=a_2=\cdots=a_M$.

为证引理 2，不妨假定 $\alpha=1$，否则可以作替换，令 $a_I^\alpha=c_I$.

当 $M=2$ 时，容易验证(请读者自行演算)

$$\frac{(a_1^{p_1}a_2^{p_2})^{p_1a_1+p_2a_2}}{(a_1^{p_1a_1}a_2^{p_2a_2})^{p_1+p_2}}=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{p_1p_2(a_2-a_1)}\leqslant 1;$$

对于一般的 M，有

$$\frac{(a_1^{p_1}\cdots a_M^{p_M})^{p_1a_1+\cdots+p_Ma_M}}{(a_1^{p_1a_1}\cdots a_M^{p_Ma_M})^{p_1+\cdots+p_M}}=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{p_1p_2(a_2-a_1)}\cdots\left(\frac{a_1}{a_M}\right)^{p_1p_M(a_M-a_1)}$$

$$\times\frac{(a_2^{p_2}\cdots a_M^{p_M})^{p_2a_2+\cdots+p_Ma_M}}{(a_2^{p_2a_2}\cdots a_M^{p_Ma_M})^{p_2+\cdots+p_M}}.$$

因此，对 M 用数学归纳法，可以证得引理 2.

定理 1 的证明 对 $G(x)$ 直接求导后将 $x=0$ 代入得

$$\frac{\mathrm{d}G(0)}{\mathrm{d}x}=\log\frac{P(1)}{Q(1)}<0,$$

由引理 2，类似可得

$$\frac{\mathrm{d}G(1)}{\mathrm{d}x}=a_1^{p_1}\cdots a_M^{p_M}\log\frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)},$$

其中的 $\alpha=1-(p_1+\cdots+p_M)$.

由定理 1 中的条件并利用引理 2，定理 1 证得.

形如 $F(x)$ 的另一个凸函数的例子是

$$H(x)=\sum_{I=1}^{M}p_Ia_I(a_1a_2\cdots a_M/a_I^M)^{p_1p_2\cdots p_Mx/p_I}.$$

我们有

$$\frac{\mathrm{d}H(0)}{\mathrm{d}x}=p_1p_2\cdots p_M\log\frac{P(1)}{Q(1)}<0,$$

如果在 $P(\alpha)$ 及 $Q(\alpha)$ 中令 $p_1=p_2=\cdots=p_M=1$. 由不等式 $H(0)<H(-1)$ 可得

$$\sum_{I=1}^{M} p_I a_I < \sum_{I=1}^{M} p_I a_I \left(\frac{a_I^M}{a_1 a_2 \cdots a_M}\right)^{p_1 p_2 \cdots p_M / p_I}$$

除非 $a_1=a_2=\cdots=a_M$.

（朱学贤编译,刘勇校）

$x^y = y^x$ 的有理解[①]

M. Sved

数 16 有一个非常有趣的性质，它可以写成如下两种形式的整数的正整数次方幂：

$$16 = 2^4 = 4^2.$$

自然会提出这样的问题：是否存在其他的整数对(x,y)使得

$$x^y = y^x. \tag{1}$$

这一问题不是新的，解答也不是太困难，但因为它没有被包含在正规的教科书中，所以并不广为人知.

在 1728 年 Daniel Bernoulli 写给 Goldbach 的一封信里，提到了方程(1)，并认为$(x,y)=(2,4)$(或者$(4,2)$)是唯一的整数解. 在回信中，Goldbach 给出了方程(1)的一般解. 他的做法是：令

$$y = ax,$$

得

$$x^{ax} = (ax)^x,$$

简化并舍去 $a=1$ 这一平凡的情形后，得

$$x = a^{1/(a-1)}, \quad y = a^{a/(a-1)}. \tag{2}$$

Euler 在[2]中也曾比较详细地讨论了方程(1).

隐函数 $y^x - x^y = 0(x>0, y>0)$的图像见图 1.

在(2)式中令 $u=1/(a-1)$，我们得到

---

① 编译自"On the rational solutions of $x^y = y^x$", *Math. Magazine*, **63** (1990), **1**, 30～33.

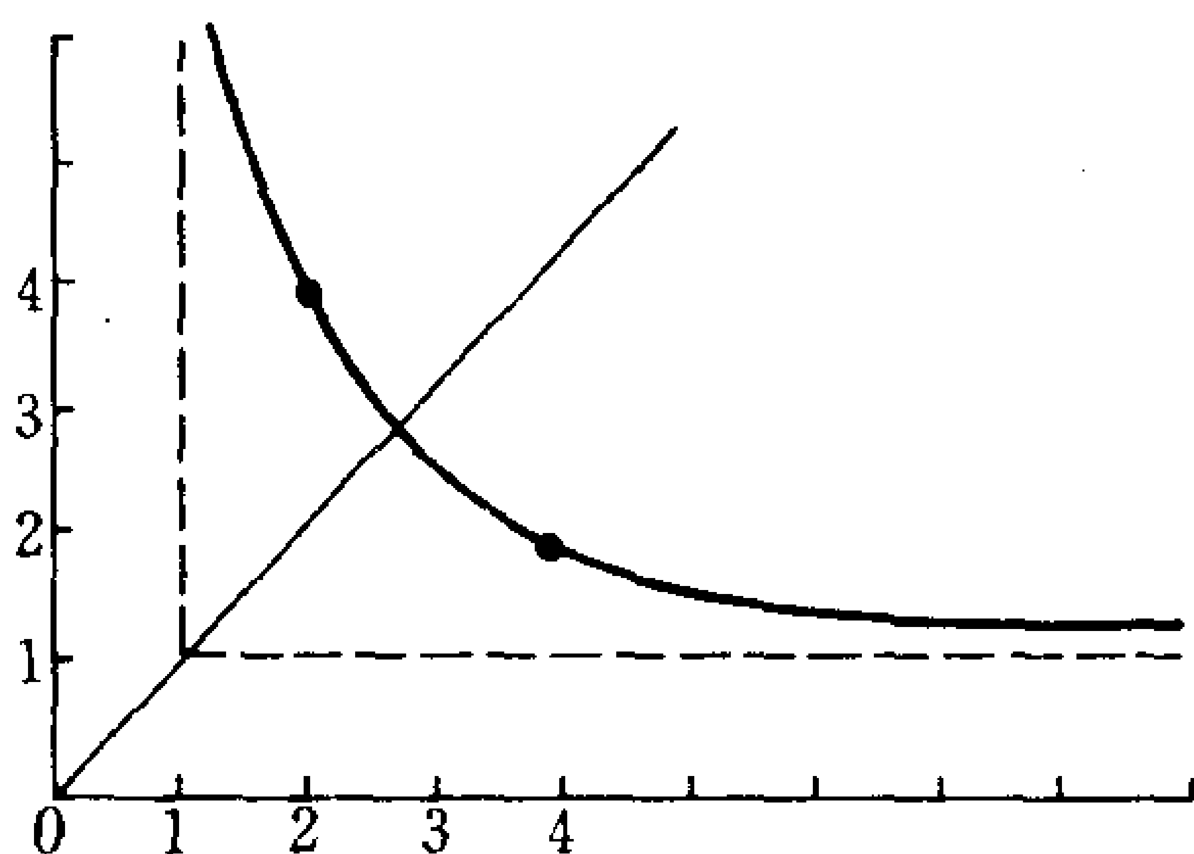


图 1

$$x=\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}, \quad y=\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+1}. \tag{3}$$

图 1 中的图形有两条分支：当 $a=1$ 时是直线 $y=x$；而参数方程(3)的图像是一条关于直线 $y=x$ 对称且以 $x=1$ 和 $y=1$ 为渐近线(分别当 $u\to 0+$ 和 $u\to 0-$ 时)的曲线. 曲线和直线的交点是

$$\left(\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u},\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+1}\right)=(\mathrm{e},\mathrm{e}).$$

曲线分支上仅有的整数格点是(2,4)和(4,2)，但在(3)中令 u 取整数值后，Euler 得到了无穷多个具有有理数坐标的分离的点：

$$(9/4,27/8),(64/27,256/81),\cdots.$$

在 18 世纪开始的一段时间里，方程(1)看来是一个很热门的问题. L. E. Dickson 在他的著作《数论史》(History of the theory of numbers，[3])中引述了 1951 年之前关于这一问题的一些贡献，其中值得注意且很容易被接受的是 E. J. Moulton 所作的关于实的 x 和 y，方程(1)的完全轨迹的讨论([4]).

这个问题再一次引起人们注意是在1960年作为一个Putnam竞赛问题，寻求(1)的整数解. A. Hausner又将结果推广到代数数域([5]).

这篇短文试图去求(1)的所有非平凡的有理解. 我们将证明这些解由序列

$$\{a_n, b_n\}, (a_n, b_n) \to (e, e)$$

给出，其中的 a_n 和 b_n 证明是与Goldbach和Euler建立的表达式(3)是一致的，是由将正整数代入(3)后得到的.

舍弃(1)的平凡解 $x=y$ 以后，我们不妨假定 $y>x$，并将(1)式改写成

$$y = x^{y/x},$$

两边除以 x 得

$$x^{(y/x)-1} = y/x. \tag{4}$$

令

$$y/x - 1 = m/n, \tag{5}$$

其中的 m、n 是正整数，又设 m/n 是既约的，即最大公因子

$$(m, n) = 1.$$

代入(4)得

$$x^{m/n} = \frac{m+n}{n},$$

或者

$$x = (m+n)^{n/m}/n^{n/m}. \tag{6}$$

因为 m 和 n 是互素的，所以 $m+n$ 与 n 也互素，从而有

$$((m+n)^n, n^n) = 1.$$

因此可以从(6)推得：x 是有理数当且仅当 $(m+n)^n$ 和 n^n 都是 m 次方幂.

又因为 m 和 n 是互素的，所以 $m+n$ 和 n 都必定是一个

m 次方幂.

分别设 $n=a^m$,和 $m+n=b^m$,a,b 是正整数且 $b>a$.

这可能且只可能当 $m=1$ 时才成立,因为如果 $m>1$,则两个不同的正整数的 m 次方幂的差必大于 m. 从而由(6)得

$$x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

并由(4)得

$$y=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, n=1,2,\cdots.$$

特别地,当 $y>x$ 时(1)的唯一的整数解是取 $n=1$,即

$$x=2, \quad y=4.$$

有意思的是可以通过图像来审视一下上面的结果. 我们要求数组 (x,y) 满足

$$x^{1/x}=y^{1/y}, \tag{7}$$

或者等价地,满足

$$\frac{1}{x}\ln x=\frac{1}{y}\ln y. \tag{8}$$

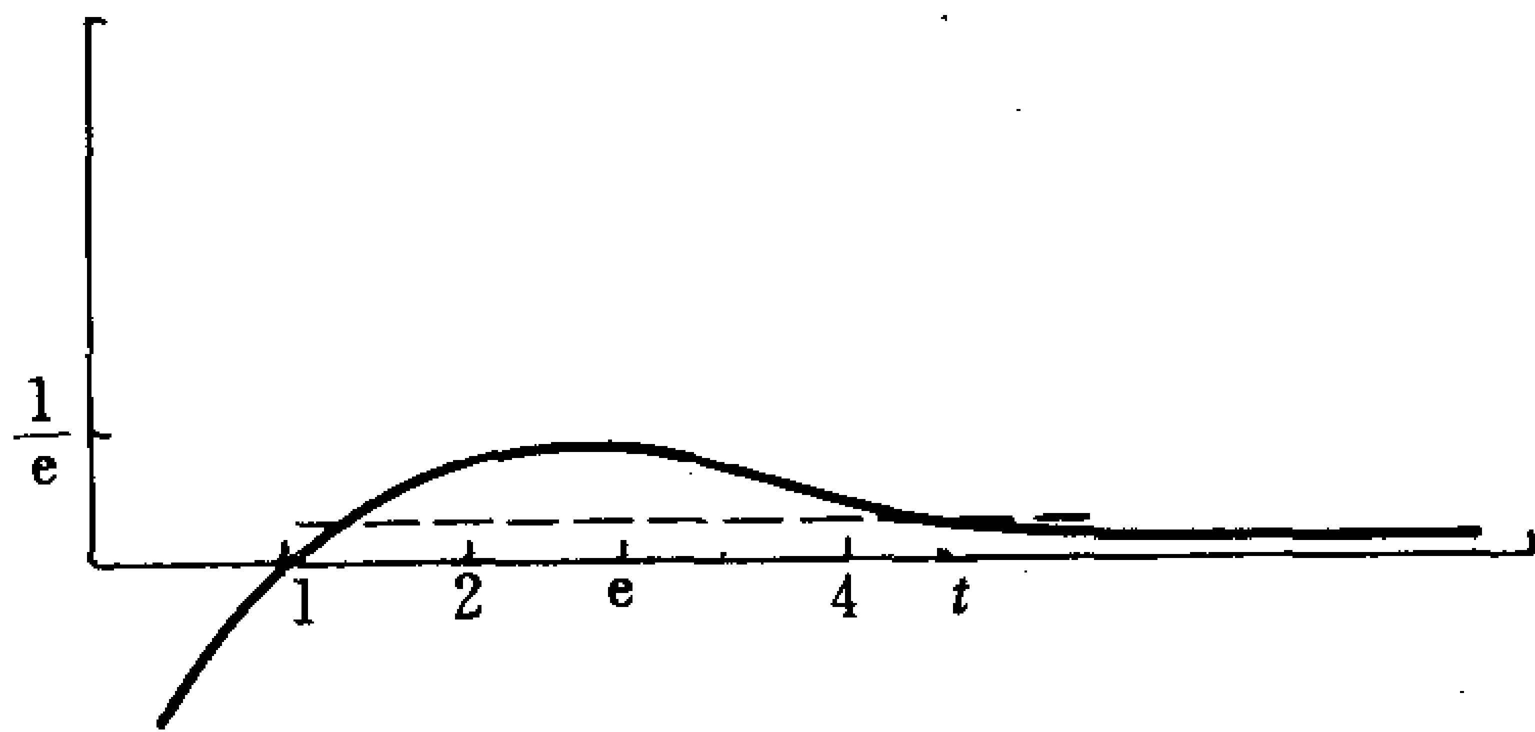


图 2

从 $f(t)=\frac{1}{t}\ln t(t>0)$ 的图像(图 2)容易看到,对于任意 $t>e$,只有唯一的 t',$1<t'<e$,使得 $f(t')=f(t)$.

因此，在图像上，$t>e$ 的点和满足(7)的数对(x,y)之间有一个双向单射. 相应于有理数对的点全部在对应于区间 $e<t\leqslant 4$的曲线段上. 这就解释了有理解的"稀罕性".

（刘容光编译，刘勇校）

参 考 文 献

[1] *Correspondence Math. Phys.* (edited by Fuss), Vol. **2**, pp. 262~280.

[2] Leonhard Euler, Introduction in analysis infinitorum, Tom I, Cap. 21 § 519.

[3] L. E. Dickson, History of the Theory of Numbers, New York, Vol. Geneva and Lausanne, 1748, p. 687.

[4] E. J. Moulton, The real function defined by $x^y=y^x$, *Amer. Math. Monthly*, **23**(1916), 233~237.

[5] A. Hausner, Algebraic number fields and the Diophantine equation $m^n=n^m$, *Amer. Math. Monthly*, **68**(1961), 856~861.

整数方幂和的几个算法①

D. Acu

1. 设 $S_k(n)=1^k+2^k+\cdots+n^k$,其中的 k 和 n 都是正整数.对于 $k=1,2,\cdots$,计算 $S_k(n)$的一般方法是利用等式

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}S_i(n)=(n+1)^k-1, \tag{1}$$

其中的$\binom{k}{i}$表示二项式系数,即$\binom{k}{i}=k!\ /(i!\ (k-i)!)$.

C. Kelly([1])利用二项式展开给出了等式(1)的一个非常初等的证明.下面给出的证明略微有些不同.

首先,我们有等式

$$\sum_{j=1}^{n}[(j+1)^{k+1}-j^{k+1}]=(n+1)^{k+1}-1, \tag{2}$$

将$(j+1)^{k+1}$作二项式展开,上式可写成

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\binom{k+1}{k}j^k+\binom{k+1}{k-1}j^{k-1}+\cdots+\binom{k+1}{1}j+1\right]$$
$$=(n+1)^{k+1}-1,$$

或者

$$\binom{k+1}{k}\sum_{j=1}^{n}j^k+\binom{k+1}{k-1}\sum_{j=1}^{n}j^{k-1}+\cdots+$$
$$\binom{k+1}{1}\sum_{j=1}^{n}j+\sum_{j=1}^{n}1=(n+1)^{k+1}-1.$$

---

① 编译自"Some algorithms for the sums of integer powers",*Math. Magazine*,**61**(1988),189～191.

此即(1)式.

利用形式(2)的等式还可以推得形式(1)的仅关于奇数脚标 i 或偶数脚标 i 求和的公式.

2. 为此考虑等式

$$\sum_{j=1}^{n}[(j+1)^{k+1}-(j-1)^{k+1}]=(n+1)^{k+1}+n^{k+1}-1.$$

利用二项式展开,可推得

$$\binom{k+1}{1}S_k(n)+\binom{k+1}{3}S_{k-2}(n)+\binom{k+1}{5}S_{k-4}(n)+\cdots$$

$$=\frac{(n+1)^{k+1}+n^{k+1}-1}{2}. \tag{3}$$

如果在(3)式中取 $k=2p,p=0,1,\cdots$,则得

$$\binom{2p+1}{1}S_{2p}(n)+\binom{2p+1}{3}S_{2p-2}(n)+\cdots$$

$$+\binom{2p+1}{2p+1}S_0(n)=\frac{(n+1)^{2p+1}+n^{2p+1}-1}{2}. \tag{4}$$

如果在(3)式中取 $k=2p-1,p=1,2,3,\cdots$,则得

$$\binom{2p}{1}S_{2p-1}(n)+\binom{2p}{3}S_{2p-3}(n)+\cdots$$

$$+\binom{2p}{2p-1}S_1(n)=\frac{(n+1)^{2p}+n^{2p}-1}{2}. \tag{5}$$

特别地,由(4)可以推得:

当 $p=0$ 时,$S_0(n)=n$;

当 $p=1$ 时,$3S_2(n)+S_0(n)=\dfrac{(n+1)^3+n^3-1}{2}$,将 $S_0(n)=n$ 代入可得 $S_2(n)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

当 $p=2$ 时,

$$5S_4(n)+10S_2(n)+S_0(n)=\frac{(n+1)^5+n^5-1}{2},$$

将 $S_0(n)$ 及 $S_2(n)$ 代入可得

$$S_4(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30};$$

等等.类似地,可从(5)式推得 $S_1(n)$、$S_3(n)$、$S_5(n)$ 等等.

3. 但对于 $S_1(n)$, $S_3(n)$, …,我们还可以用下面的方法来计算:由等式

$$\sum_{j=1}^{n}[j^k(j+1)^k-j^k(j-1)^k]=n^k(n+1)^k,$$

利用二项式展开可推得

$$\binom{k}{1}S_{2k-1}(n)+\binom{k}{3}S_{2k-3}(n)+\cdots=\frac{n^k(n+1)^k}{2},\quad (6)$$

$$k=1,2,3,\cdots.$$

由(6)可得

当 $k=1$ 时, $S_1(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

当 $k=2$ 时, $2S_3(n)=\dfrac{n^2(n+1)^2}{2}$,从而 $S_3(n)=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

当 $k=3$ 时, $3S_5(n)+S_3(n)=\dfrac{n^3(n+1)^3}{2}$,可推得

$$S_5(n)=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12};$$

当 $k=4$ 时, $4S_7(n)+4S_5(n)=\dfrac{n^4(n+1)^4}{2}$,从而可推得

$$S_7(n)=\frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24};$$

等等①.

要指出的是,公式(3),(4),(5),(6)可以在文献[3]中找到,不过作者是从 Nielson 的定理([2])推出它们的.

(刘容光编译,朱学贤校)

参 考 文 献

[1] C. Kelly, An algorithm for sums of integer powers, *Math. Magazine*, **57** (1984), 296～297.

[2] N. Nielson, Traité élémentaire des nombres de Bernoulli, Paris, 1923.

[3] J. Riordan, Combinatorial Identities, Wiley, New York, 1968.

① 利用本篇短文的方法,可以对和

$$S_k(n) = a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k, \quad k = 0,1,2,\cdots,$$

求得形式为(1),(3),(4),(5),(6)的公式,其中的 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是一个等差数列.

四面体数与平方数的和[①]

S. C. Althoen, C. B. Lacampagne

众所周知，n 个连续的正整数从 1 到 n 的和数是二项式系数$\binom{n+1}{2}$. 这和数及与它有关的二项式系数在几何上可以表示为三角形数(图 1).

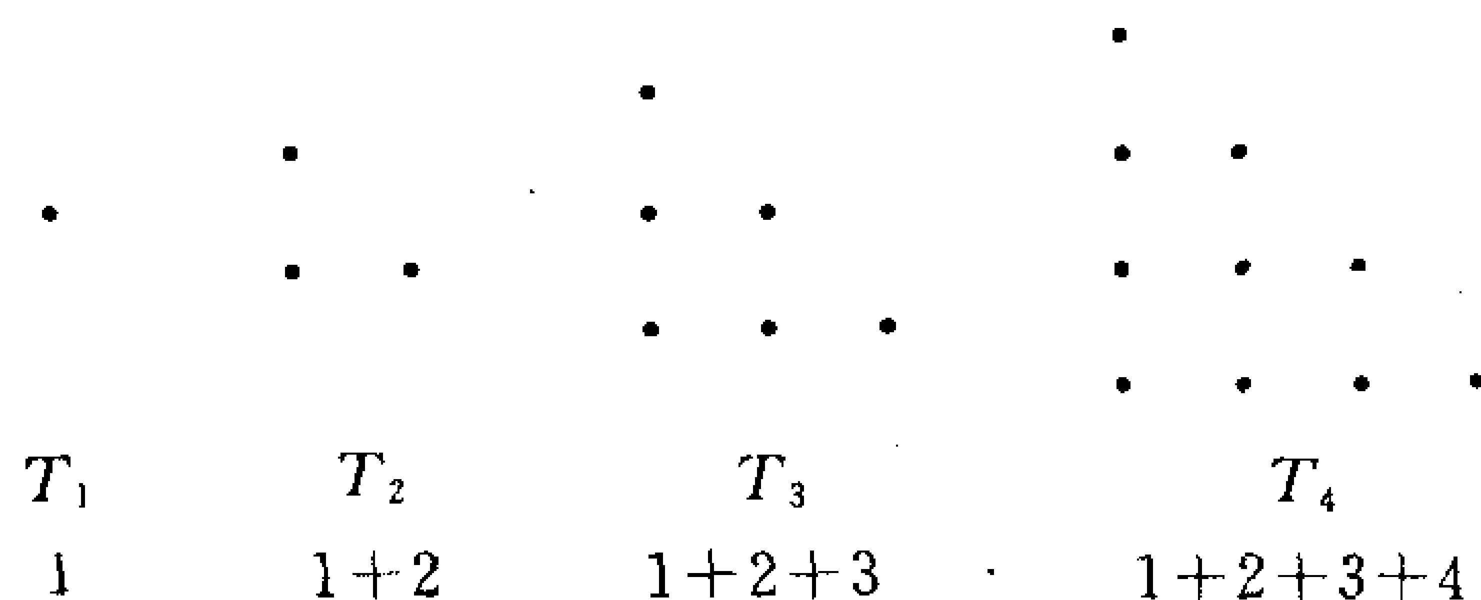


图 1

有趣的是，约在公元 100 年时 Smyrna 的 Theon 得到如下结果，两个相邻三角形数的和是一个平方数(图 2).

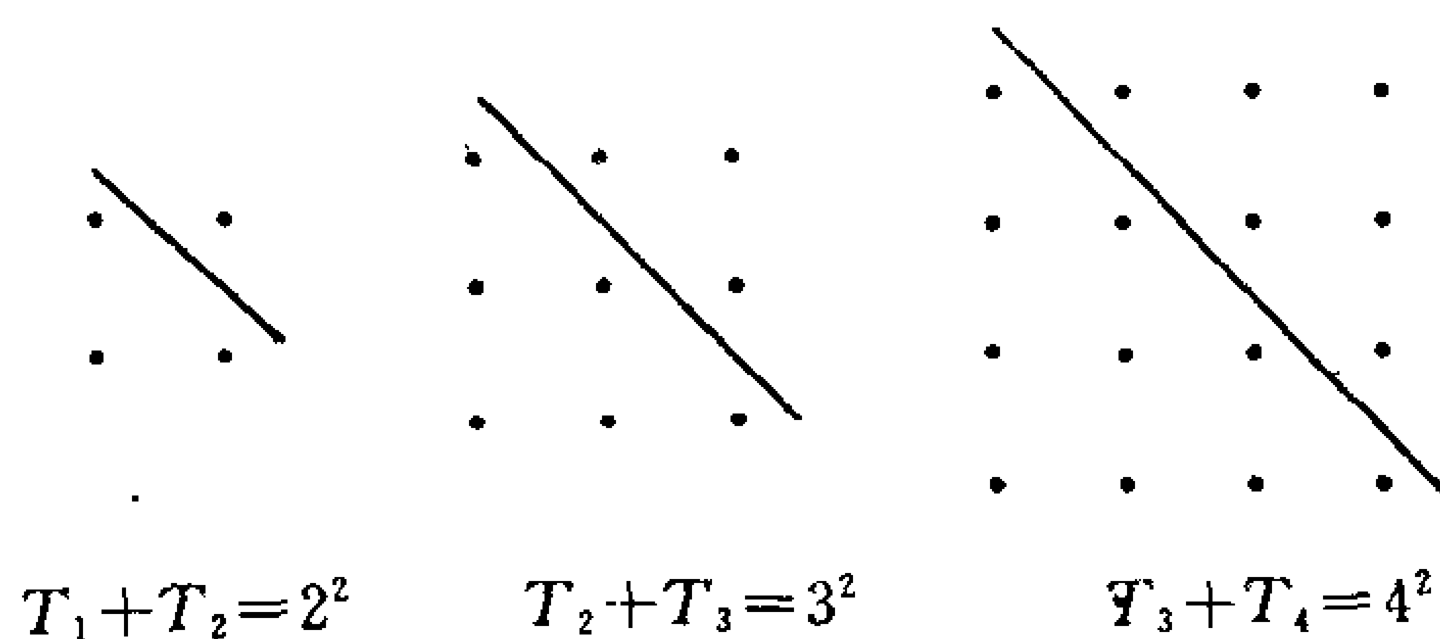


图 2

① 编译自"Tetrahedral Numbers as Sums of Square Numbers", *Math. Mag.*, **64**(1991), 104～108.

看来值得注意的是：从 1 或 2 开始对交错平方数求和时，其结果是二项式系数$\binom{n+2}{3}$，其中 n^2 是求和中的最大平方数，即

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+n^2=\binom{n+2}{3}, \tag{1}$$

$$2^2+4^2+6^2+\cdots+n^2=\binom{n+2}{3}, \tag{2}$$

这里的 n 在(1)中为奇数，在(2)中为偶数. 似乎是 Frederico Mariares[8]首先注意到了和(1)与和(2)是相关联的(见[1]). 他的文章的结尾提出了这样一个问题："这些公式…是否真是全新的?"

交错平方数的和及与之相关的二项式系数在几何上可表示为一个四面体数. 这些四面体数是 1,4,10 等等，它们与四面体有关，正如在图 3 中所指出的那样.

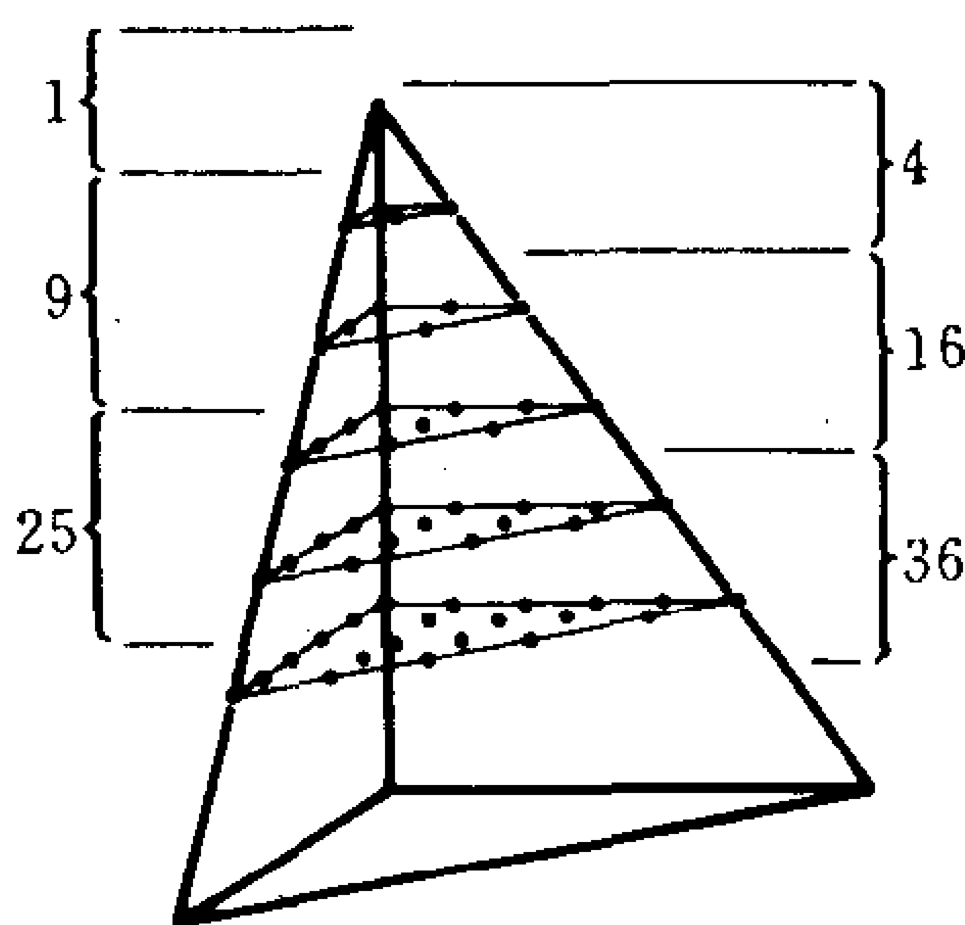


图 3

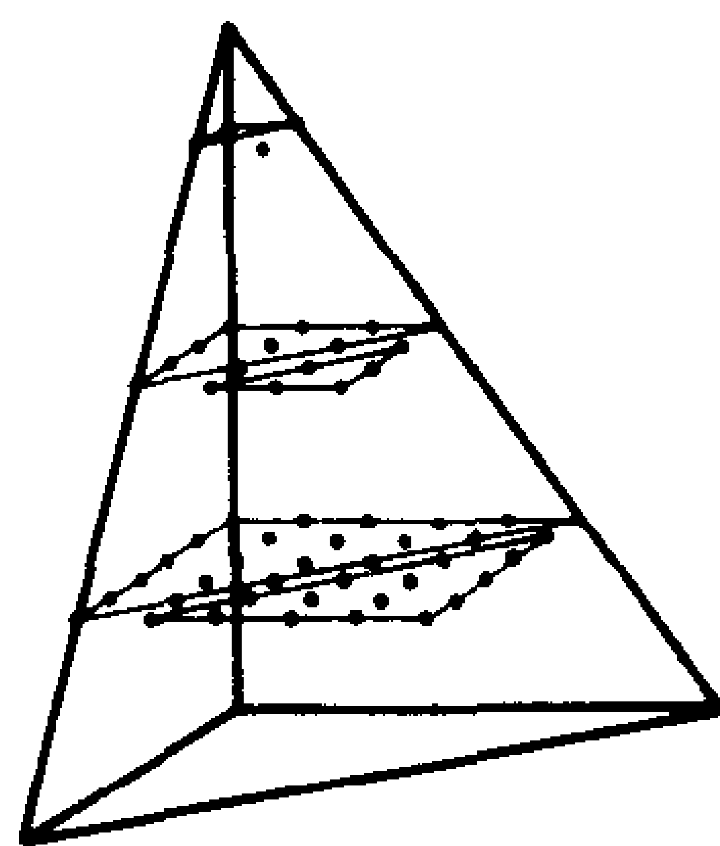


图 4

借助于两个相邻的三角形数的和的启发，我们一定也不会惊奇有如下的事实，即我们能从四面体数出发用两种方式

来生成交错的平方数.我们可以表示为(见图 4)

$$\begin{aligned}1 &+ 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + \cdots \\ &= (1+3) + (6+10) + (15+21) + \cdots \\ &= 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}1 &+ 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + \cdots \\ &= 1 + (3+6) + (10+15) + (21+28) + \cdots \\ &= 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \cdots\end{aligned}$$

等式(1) 和(2) 是利用归纳法生成函数法,或求和符号($\sum$ 符号) 演算方法来证明的极好的练习实例. 例如,通过众所周知的关于相邻平方数的和与一次幂的和的结果,由 $\sum\limits_{i=0}^{(n-1)/2}(1+2i)^2$ 可得到(1) 式.

式(1)和式(2)可以乘上任何一个平方数,比如乘 S^{2k}(这里 k 是一个非负整数)来稍作推广:

$$(S^k)^2 + (3S^k)^2 + \cdots + (ns^k)^2 = S^{2k}\binom{n+2}{3}, n\ 为奇数,$$

$$(2S^k)^2 + (4S^k)^2 + \cdots + (ns^k)^2 = S^{2k}\binom{n+2}{3}, n\ 为偶数.$$

特别地

$$2^2 + 6^2 + 10^2 + \cdots + (2n)^2 = 4\binom{n+2}{3},$$

或

$$4^2 + 8^2 + 12^2 + \cdots + (2n)^2 = 4\binom{n+2}{3}.$$

一个很自然的问题是: 有哪些其他的算术级数,使由其产生

的平方数的和可用二项式系数$\binom{m}{3}$来表示？

设

$$\sum_{i=0}^{l}(a+ki)^2=\binom{m}{3}, \tag{3}$$

其中的 a,k 和 m 都是正整数. 注意到相邻平方数和的公式表明(3)式左边是 l 的一个三次式. 这样，我们就有理由期望（而且事实上也必定是这种情况）(3)式右边具有$\binom{bl+c}{3}$的形式. 例如，在(1)式中，我们有

$$l=(n-1)/2, a=1, k=2, b=2 \text{ 及 } c=3.$$

所以，我们可假定

$$\sum_{i=0}^{l}(a+ki)^2=\binom{bl+c}{3}, \tag{4}$$

注意，对 $l=0$，有

$$a^2=\binom{c}{3}, \tag{5}$$

所以 c 是一个正整数，随之立即可知 b 也是一个正整数（为什么）. 显然，$(a,c)=(1,3)$和$(a,c)=(2,4)$都是(5)的解. 令人惊奇的是$(a,c)=(140,50)$也是一组解. 根据 Dickson[1]的说法，此解是 1876 年由 Moret-Blanc[10]所指出的. Moret-Blanc 实际上给出了下面(11)式的解. 尽管如此，在 1876 年稍晚一点，Lucas[6]在同一卷的"数学新年刊(Nouvelles Annales de Mathematiques)"上征求了关于(5)式的仅有解 $c=3,4$ 和 50 的证明.

为了从(5)式得到的 a 和 c 三组值，找出(4)式的全部解，考虑在(4)式中令 $l=1$ 和 $l=2$ 所得到的方程：

$$k^2+2ak+2a^2=\binom{b+c}{3},\tag{6}$$

$$5k^2+6ak+3a^2=\binom{2b+c}{3}.\tag{7}$$

(4)式的任何解必定是满足(6)和(7)的一组正整数$\{a,k,b,c\}$.事实上,从(6)和(7)可发现(4)的任意解必须满足:

$$4ak+7a^2=5\binom{b+c}{3}-\binom{2b+c}{3}.\tag{8}$$

(其逆不成立,是离题的话.)下面我们找到了(8)的全部解并且证明它们中有的给出已知结果(1)和(2),其他的就不能满足(6)因而也不能满足(4).

情形 1　$a=1$ 且 $c=3$. 此时方程(8)成为

$$8k=-b^3+2b^2+11b-6.$$

取模 8,容易验证当 $b=2 \pmod 8$ 时,三次式模 8 同余为 0. 由于 k 和 b 必须是正整数,故 $0<b<5$. 因而,仅有的可能的解是 $b=2$ 和 $k=2$,它给出我们熟知的(1)式.

情形 2　$a=2$ 且 $c=4$. 此时(8)式成为

$$16k=-b^3+3b^2+26b-24.$$

同样,k 和 b 是正整数,故 $0<b<7$. 经验证可很快得出两组解: $b=2,k=2$ 和 $b=4,k=4$. 第一组解给出熟知的(2)式. 第二组解无用,它不满足(6)式.

情形 3　$a=140$ 且 $c=50$. 此时(8)式为

$$1120k=-b^3+49b^2+7202b-117600.$$

两边取模 7,得到

$$0\equiv -b^3+6b \pmod 7,$$

$$0\equiv b^3+b=b(b^2+1) \pmod 7.$$

因此，$b \equiv 0 \pmod 7$，并且由于 k 必须是正整数，所以 $15 < b < 107$. 在(8)式中令 $b = 7d$，则有

$$160k = -49d^3 + 7^3d^2 + 7202d - 16800, \tag{9}$$

其中 $2 < d < 16$. 因为在(9)中 $d \equiv 0 \pmod{32}$，仅有的解是 $d = 14$. 在这种情况下(8)仅有一组解：$b = 98, k = 105$，它们不满足(6)式.

是否还有其他的数对(a, c)是(5)的解呢？这等价于要求解丢番图(Diophantine)方程

$$\binom{x+2}{3} = \frac{1}{6}x(x+1)(x+2) = y^2. \tag{10}$$

这就依次等价于求解丢番图方程

$$x(x+1)(2x+1) = 6y^2, \tag{11}$$

当 x 为偶数时(在(10)中以 $2x$ 代 x，$2y$ 代 y).

或

$$x(2x-1)(2x+1) = 3y^2. \tag{12}$$

当 x 为奇数时(在(10)中以 $2x-1$ 代 x).

前面我们曾提到，Lucas[6]在 1876 年征求关于(10)式的正数解仅有 1,2,48 的证明，它们对应于(5)的解仅有 $c = 3, 4$ 和 50. 1878 年，Meyl[9](自称是在海牙地区的一个炮兵队长)证明了(10)式仅有的解是 $x = -2, -1, 0, 1, 2$ 和 48. 这些包含上面的 c 的三个解 3,4,50 以及三个确实成不了二项式系数的退化情形 $c = 0, 1, 2$. 当 x 为偶数时，Meyl 的论证是以(11)式仅对 $x = -1, 0, 1$ 和 24 有解这一事实为依据. Lucas[7]则相信他在 1877 年的文章“平方棱锥等于一个平方数”中已经证明了这一点，但是 Lucas 的证明是有缺陷的. 1919 年 Watson[12]首次给出了一个正确的证明. 1952 年，Ljunggren 给出了一个算术证明. 关于这个问题的史料，可看 Wat-

son[12]、Dickson[1]、Guy[3]和 Uchiyama[11]的文章，最后这篇文章是 Martin Gardner 告诉我们的.

（刘燕译，潘承彪校）

参 考 文 献

[1] L. E. Dickson, History of the Theory of Numbers. Vol. **2**, Diophantine Analysis, chapter I, Chelsea, New York, 1971, pp. 2, 25, 35.

[2] M. Gardner, On the patterns and the unusual properties of figurate numbers, *Scientific American*, **231**(1974), 116～120.

[3] R. K. Guy, Unsolved Problems in Number Theory, Springer-Verlag, New York, 1980, p. 82.

[4] W. Ljunggren, New solution of a problem proposed by E. Lucas, *Norsk Matematisk Tidsskrift*, **34**(1952), 65～72.

[5] E. Lucas, Question 1180, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2), **14** (1875), 336.

[6] ________, Question 1194, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2), **15** (1876), 144.

[7] ________, [Solution to]Question1180, *Noucelles Annales de Mathématiques* (2), **16**(1877), 429～432.

[8] F. Mariares, Curiosidades arithméticas, *Recista de la Sociedad Mathemática Españòla*, **2**(1913), 333～335.

[9] A.-J.-J. Meyl, [Solution to] Question 1194, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, (2)**17**(1878), 464～467.

[10] Moret-Blanc, [Solution to] Question 1180, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2), **15**(1876), 46～48.

[11] S. Uchiyama, On some Diophantine equations, Lectre Notes(1984), Tokyo.

[12] G. N. Watson, The problem of the square pyramid, *The Messenger of Mathematics*, **48**(1919), 1～22.

第35届国际数学奥林匹克
竞　赛　试　题

1. 设 m,n 是正整数. 集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集,满足条件:若 $a_i+a_j\leqslant n$, $1\leqslant i\leqslant j\leqslant m$,则 a_i+a_j 也属于 A. 证明:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}\geqslant\frac{n+1}{2}.$$

2. 已知:(a) N 是 $\angle BAC$ 的角平分线上的一点;(b) P 是直线 AB 上的一点,使 $\angle ANP=90°$;(c) O 是直线 AN 上的一点,使 $\angle APO=90°$. 设 Q 是线段 NP 上的任意一点,过 Q 的任意一条直线分别交 AB, AC 于点 E, F. 证明: $\angle OQE=90°$ 的充要条件是 $QE=QF$.

3. 对任一正整数 k,以 A_k 表示集合 $\{k+1,k+2,\cdots,2k\}$ 中所有满足下述条件的元素组成的子集:它的二进制表示中恰好有三个数字是1. 记 A_k 中的元素个数为 $f(k)$.

(a) 证明对任一正整数 m, $f(k)=m$ 至少有一解.

(b) 求出所有正整数 m 使得 $f(k)=m$ 恰有一解.

4. 求出所有的正整数对 $\{m,n\}$ 使得 $\frac{n^3+1}{mn-1}$ 是整数.

5. 求出满足以下条件的全部函数 f:

(a) f 的定义域为 $x>-1$,及 $f(x)>-1$;

(b) 对所有的 $x>-1$, $y>-1$ 有

$$f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x);$$

(c) 在区间 $-1<x<0$ 及 $x>0$ 上, $f(x)/x$ 均为严格递

增.

6. 求一个具有以下性质的正整数集合 A：对任意一个有无穷多个素数组成的集合 P，一定存在正整数 $m\in A$ 及 $n\notin A$，使得它们都是同样个数的 P 中的不同元素的乘积.

第35届国际数学奥林匹克竞赛

试　题　解　答

潘　承　彪

本届比赛在香港地区举行.同前几届相比,本届赛题的难度降低了不少,其中的第6题好像是一道智力测验题.下面是试题解答.

第1题解答　可以假定$a_1>a_2>\cdots>a_m$.这样,对每个a_i在集合A中有且仅有$i-1$个元素$a_1,\cdots,a_{i-1}$比它大.对任一个a_j,若$a_i+a_j\leqslant n$,则由假定知:

$$n\geqslant a_i+a_j>a_i+a_{j+1}>\cdots>a_i+a_m.$$

因此,由条件知,这$m-j+1$个数$a_i+a_j,\cdots,a_i+a_m$均属于集合A且都大于i.所以,必有$m-j+1\leqslant i-1$,即$j\geqslant m-i+2$.这也就是说,对每个i有

$$a_i+a_{m-i+1}\geqslant n+1.$$

由此即得

$$\begin{aligned}2(a_1+a_2+\cdots+a_m)=&(a_1+a_m)+(a_2+a_{m-1})+\cdots\\&+(a_m+a_1)\\\geqslant&m(n+1).\end{aligned}$$

证毕.

容易看出等号成立的充要条件是

$$a_i+a_{m-i+1}=n+1,\quad 1\leqslant i\leqslant(m+1)/2.$$

由此可确定所有这样的子集.

第 2 题解答 如图 1 所示. 设 PN 的延长线交 AC 于 R. 由条件(a),(b)知$\triangle APR$ 是等腰三角形及 $OP=OR$. 进而由条件(c)推出$\angle ORA=90°$及$\angle OPQ=\angle ORQ$.

必要性 假定已知$\angle OQE=90°$. 由此及条件(c)推出四点 O,Q,P,E 在同一圆周上. 所以,$\angle OEQ=\angle OPQ$. 另一方面,由$\angle OQE=\angle ORA=90°$推出四点 O,R,F,Q 四点亦在同一圆周上,所以$\angle OFQ=\angle ORQ$. 由此及前证知$\angle OFQ=\angle OEQ$. 因而有 $QE=QF$.

充分性 假定已知 $QE=QF$. 过 F 作直线平行于 AB,交 PR 于 G. 由 $QE=QF$ 知$\triangle QPE\cong\triangle QGF$,$EP=GF$. 由$\triangle APR$ 是等腰三角形知$\triangle GFR$ 也是等腰的,所以 $RF=GF=EP$. 由此及前证知直角$\triangle ORF\cong\triangle OPE$,及 $OE=OF$. 因而有$\angle OQE=90°$. 证毕.

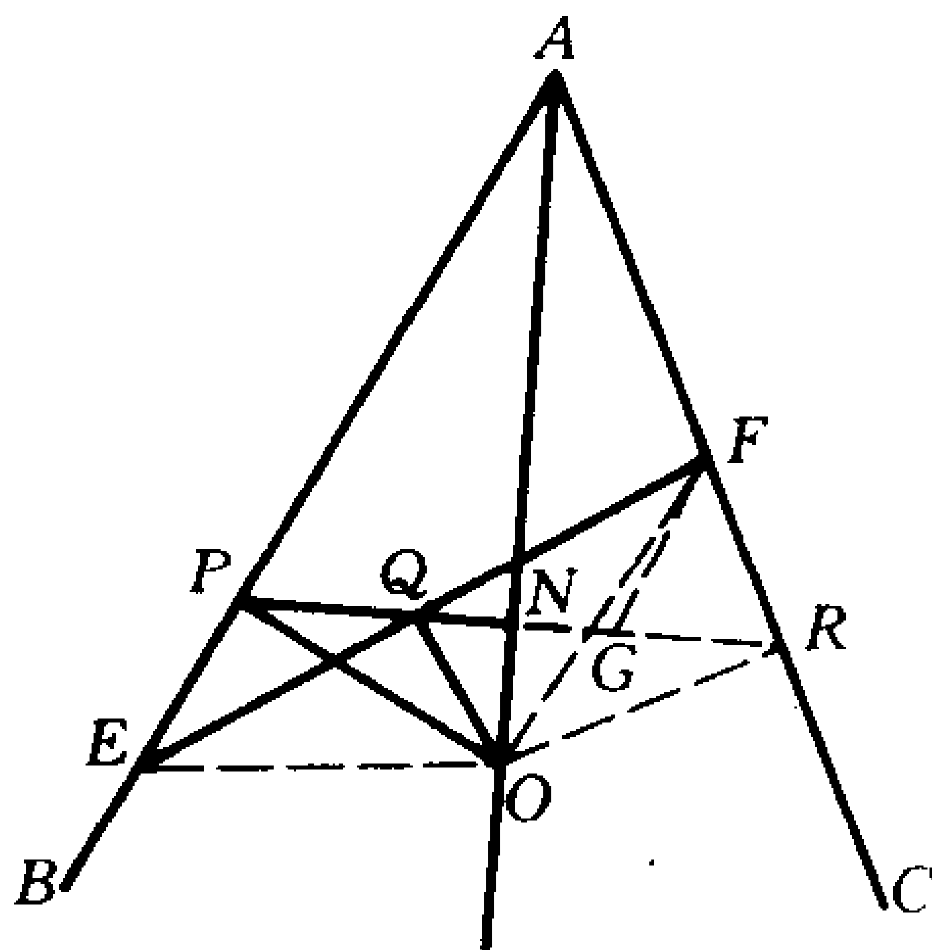


图 1

第 3 题解答 一个正整数 n 的二进制表示中恰有三位数字为 1 时,就说 n 具有性质 α,并定义正整数变数 n 的函数

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n\text{ 具有性质 }\alpha;\\0, & n\text{ 不具有性质 }\alpha.\end{cases}\tag{1}$$

显见，存在无穷多个 n 使 $\delta(n)=1$，以及 $f(1)=0$，

$$f(k)=\sum_{j=k+1}^{2k}\delta(j). \tag{2}$$

此外，由于 $2m$ 的二进位表示是 m 的二进位表示后加一个数字 0，所以

$$\delta(2m)=\delta(m). \tag{3}$$

为讨论函数 $f(k)$ 的变化，我们来比较 $f(k+1)$ 和 $f(k)$. 我们有，

$$\begin{aligned} f(k+1) &= \sum_{j=k+2}^{2(k+1)} f(j) \\ &= \sum_{j=k+1}^{2k} f(j)+\delta(2k+1)+\delta(2k+2) \\ &\quad -\delta(k+1) \\ &= f(k)+\delta(2k+1), \end{aligned} \tag{4}$$

最后一步用了式(3). 由此及前面的讨论就推出：$f(k)$ 是不减函数，$f(k+1)$ 要么和 $f(k)$ 相等、要么等于 $f(k)+1$，$f(k)$ 随 k 趋于无穷而趋于无穷，以及因 $f(1)=0$，所以 $f(k)$ 能取到每一个正整数值. 这就证明了结论(a).

由以上所证知，对正整数 m 使 $f(k)=m$ 仅有一解 k 的充要条件是

$$f(k-1)=m-1,\quad f(k)=m,\quad f(k+1)=m+1. \tag{5}$$

由此及式(4)知，亦即当且仅当

$$\delta(2k-1)=\delta(2k+1)=1.$$

由于 $2k$ 的二进位表示必为

$$2k=1\times\times\cdots\times 0.$$

所以

$$2k+1=1\times\times\cdots\times 1.$$

因此 $\delta(2k+1)=1$ 当且仅当

$$2k=1\underbrace{0\cdots0}_{r}\,1\underbrace{0\cdots0}_{s},\quad r\geqslant 0, s\geqslant 1.$$

这时

$$2k-1=1\underbrace{0\cdots00}_{r+1}\underbrace{1\cdots1}_{s},\quad r\geqslant 0, s\geqslant 1.$$

因此，这时为使 $\delta(2k-1)=1$ 当且仅当 $s=2$. 综上所述，当且仅当

$$2k=1\underbrace{0\cdots0}_{r}100,\quad r\geqslant 0,$$

时才有式(5)成立. 这时

$$k=2^{r+2}+2,\quad r\geqslant 0. \tag{6}$$

这样，为定出全体这样的 m，就是要求 $f(2^{r+2}+2)$ 的值. 由式(4)可得

$$\begin{aligned}f(2^{r+2}+2)&=f(2^{r+2}+1)+\delta(2^{r+3}+3)\\&=f(2^{r+2})+\delta(2^{r+3}+1)+\delta(2^{r+3}+3).\end{aligned}$$

容易看出，

$$\delta(2^{r+3}+1)=0,\quad \delta(2^{r+3}+3)=1,\quad r\geqslant 0.$$

这样就归结为求 $f(2^{r+2})$ 的值. 由于从 0 到 2^h-1 的二进位表示是由二进制数

$$\underbrace{\times\times\cdots\times}_{h}$$

中的数字×，×，…，×任意取值 0,1 给出. 所以其中具有性质 α 的数恰好由组合数 $\binom{h}{3}$ 给出，由此及 $\delta(2^h)=0$ 推出

$$\sum_{j=1}^{2^h}\delta(j)=\binom{h}{3}.$$

由此即得

$$f(2^{r+2})=\sum_{j=1}^{2^{r+3}}\delta(j)-\sum_{j=1}^{2^{r+2}}\delta(j)$$

$$=\binom{r+3}{3}-\binom{r+2}{3}=\binom{r+2}{2}$$

综合以上讨论得

$$f(2^{r+2}+2)=1+\binom{r+2}{2},\quad r\geqslant 0.$$

因此，使 $f(k)=m$ 仅有一解的全体 m 由整数

$$1+\binom{r+2}{2},\quad r\geqslant 0,$$

给出，且其解 $k=2^{r+2}+2$. 证毕.

第 4 题解答　下面给出两种解法.

解答一　记 $a|b$ 为 a 整除 b. 由

$$n^3+1=n(n^2+m)-(mn-1)$$

可推出

$$mn-1|n^3+1\Longleftrightarrow mn-1|n(n^2+m)$$
$$\Longleftrightarrow mn-1|n^2+m\Longleftrightarrow mn-1|m(n^2+m)$$
$$\Longleftrightarrow mn-1|m^2+n,$$

最后一步用到了

$$m(n^2+m)=m^2+n+n(mn-1).$$

由以上讨论可以看出 m,n 是对称的，问题可转化为求所有正整数 $m\geqslant n\geqslant 1, mn-1|n^2+m$.

(a) $n=1$ 时，仅有 $m=2,3$.

(b) $m=n>1$ 时，由

$$\frac{n^2+m}{mn-1}=\frac{n}{n-1}=1+\frac{1}{n-1}$$

知，仅有 $m=n=2$.

(c) $m>n=2$ 时，仍利用原条件：$2m-1\mid 2^3+1$，m 仅取 5.

(d) $m>n=3$ 时，由原条件 $3m-1\mid 3^3+1$ 知，仅有 $m=5$.

(e) 当 $m>n>3$ 时，

$$\begin{aligned} mn-1 &= n^2+m+(mn-n^2-m-1) \\ &> mn-n^2-m-1 \\ &= (m-(n+1))(n-1)-2 \\ &\geqslant -2 \\ &> -(mn-1). \end{aligned}$$

因此，$mn-1\mid n^2+m$ 当且仅当

$$mn-n^2-m-1=0,$$

即

$$m=(n+1)+\frac{2}{(n-1)},$$

现在 $n>3$，这不可能.

综上所述，全部解为：

$$\begin{aligned} \{m,n\} = &\{2,1\},\{3,1\},\{5,2\},\{5,3\},\{1,2\}, \\ &\{1,3\},\{2,5\},\{3,5\},\{2,2\}. \end{aligned}$$

解答二　容易看出，m^3 与 $mn-1$ 互素，所以 $mn-1$ 整除 n^3+1 等价于 $mn-1$ 整除 $m^3(n^3+1)$. 由于

$$m^3(n^3+1)=(m^3n^3-1)+m^3+1,$$

所以 $mn-1$ 整除 n^3+1 等价于 $mn-1$ 整除 m^3+1. 因此，若 $m=a,n=b$ 是一组解，则 $m=b,n=a$ 亦是一组解，即 m,n 是对称的. 因此，可以仅讨论 $m\geqslant n$ 的情形，$m<n$ 的情形由对称性推出.

(1) 若 $m=n$,我们有

$$\frac{n^3+1}{mn-1}=\frac{n^3+1}{n^2-1}=n+\frac{1}{n-1},$$

因此,仅可能有 $m=n=2$ 一组解.

(2) 若 $m>n$. 显见,为使 $mn-1$ 整除 n^3+1,m 不能比 n 大太多. 当 $n=1$ 时,

$$\frac{n^3+1}{mn-1}=\frac{2}{m-1},$$

因此,仅可能有 $m=2,n=1;m=3,n=1$ 两组解

当 $n\geqslant 2$ 时,我们用带余数除法来确定 m,n 之间的关系. 设 $mn-1$ 整除 n^3+1. 我们有

$$\frac{n^3+1}{mn-1}=9n+r,\quad 0\leqslant r<n.$$

因而有

$$n^3+1=(qmn-q+rm)n-r.$$

所以,n 整除 $r+1$,因此必有 $r=n-1$. 下面来定 q. 由此及 $m>n$ 得

$$(q+1)n-1=\frac{n^3+1}{mn-1}<\frac{n^3+1}{n^2-1}=n+\frac{1}{n-1}.$$

所以

$$qn<1+\frac{1}{n-1}.$$

由此及 $n\geqslant 2$ 得 $q=0$. 因此得

$$n^3+1=(mn-1)(n-1).$$

$$m=n+1+\frac{2}{n-1}.$$

所以,这时仅有 $n=2,m=5;n=3,m=5$ 两组解.

综上所述,根据对称性知共有九组解:

$$\{m,n\}=\{2,2\},\{2,1\},\{1,2\},\{3,1\},\{1,3\},$$
$$\{5,2\},\{2,5\},\{5,3\},\{3,5\}.$$

证毕.

第 5 题解答 在条件(b)中取 $y=x$ 得

$$f(x+(1+x)f(x))=x+(1+x)f(x). \qquad (1)$$

设 u 是函数 f 的不动点,即 $f(u)=u$. 在式(1)中取 $x=u$ 得

$$f(u^2+2u)=u^2+2u,$$

即 u^2+2u 也是 f 的不动点. 若 $u>0$,则

$$u^2+2u>u>0.$$

由条件(c)知,

$$\frac{f(u^2+2u)}{u^2+2u}>\frac{f(u)}{u}.$$

这与 u,u^2+2u 均为不动点矛盾. 若 $-1<u<0$,则

$$-1<u^2+2u<u<0.$$

由条件(c)知

$$\frac{f(u^2+2u)}{u^2+2u}<\frac{f(u)}{u}.$$

这也与 u,u^2+2u 均为不动点矛盾. 因此仅可能有 $u=0$. 条件(1)不仅表明,只要满足题意的函数存在,这函数就一定有不动点,且对所有 $x>-1$,$u=x+(1+x)f(x)$ 均为不动点. 结合以上讨论就推出: $x+(1+x)f(x)$ 恒为零,即必有

$$f(x)=-\frac{x}{1+x}, \quad x>-1.$$

容易验证(也必须验证)这个函数满足全部条件(留给读者). 因此,满足条件的函数只有这一个. 证毕.

第 6 题解答　由题意知，只要考虑 A 是由无平方因子数(即不能被大于 1 的平方数整除的正整数. 除 1 外，这种数均是不同的素数的乘积)组成的集合. 由分析题目的要求知，集合 A 中的数的素因数的个数与其素因数的大小应具有某种特定关系. 下面就是一种构造法.

设无平方因子数 $a>1$，其素因数分解式为

$$a = q_1, q_2 \cdots q_k,$$

q_j 是素数且 $q_1<q_2<\cdots<q_k$. 由全体满足条件 $k=q_1$ 的 a(即素因数个数等于其最小素因数的无平方因子数)组成的集合 A 就具有所说的性质. 因为任给一个由无穷多个素数组成的集合

$$P = \{p_1, p_2, p_3, \cdots\}, \quad p_1 < p_2 < p_3 < \cdots,$$

一定有

$$p_1 p_2 \cdots p_k \in A, \quad k = p_1,$$

及

$$p_2 p_3 \cdots p_{k+1} \notin A, \quad k = p_1.$$

第 36 届国际数学奥林匹克

竞　赛　试　题

1. 设在一直线上依次给定 A,B,C 及 D 四点. 分别以 AC 和 BD 为直径的两圆交于点 X 和 Y. 直线 XY 和 BC 交于点 Z. 设 P 是直线 XY 上异于 Z 的一点，直线 CP 和以 AC 为直径的圆交于 C 和 M，以及直线 BP 和以 BD 为直径的圆交于 B 和 N. 证明：直线 AM,DN 和 XY 交于一点.

2. 设 a,b 及 c 是正实数，满足 $abc=1$. 证明：

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

3. 确定所有这样的大于 3 的整数 n：在平面上存在 n 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，及实数 $r_1,r_2,\cdots,r_n$，使得(i) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意三点不在同一直线上；(ii) 对任意三个整数 $i,j,k(1\leqslant i<j<k\leqslant n)$，三角形 $A_iA_jA_k$ 的面积等于 $r_i+r_j+r_k$.

4. 设正实数序列 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{1995}$ 满足条件：(i) $x_0=x_{1995}$；(ii) 对 $i=1,2,\cdots,1995$，有

$$x_{i-1}+\frac{2}{x_{i-1}}=2x_i+\frac{1}{x_i}.$$

求 x_0 的最大值.

5. 设 $ABCDEF$ 是凸六边形，满足

$$AB=BC=CD,DE=EF=FA,$$

及 $\angle BCD=\angle EFA=60°$. 再设 G,H 是这个六边形的两个内点，使得 $\angle AGB=\angle DHE=120°$，证明：

$$AG+GB+GH+DH+HE \geqslant CF.$$

6. 设 p 是奇素数.求集合$\{1,2,\cdots,2p\}$的所有满足以下条件的子集 A 的个数：(i) A 恰好有 p 个元素；(ii) A 中所有元素之和被 p 整除.

第36届国际数学奥林匹克竞赛试题解答

潘承彪

第36届国际数学奥林匹克竞赛，1995年7月在加拿大举行.我国代表队获得团体总分第二名.在6道试题中，第1，5题是几何题，看来是太容易了，而第3题是讨论位置关系的几何题，是一道很好的、难度适中的竞赛题.第2题是需要小心、巧妙论证的不等式，第4题是关于数列的，而第6题则属于组合数论.下面我们提供一份解答，有的作了一点分析，供大家参考和与其他解答比较.

第1题解答 先讨论点 P 在 Z 和 X 之间的情形.如图1

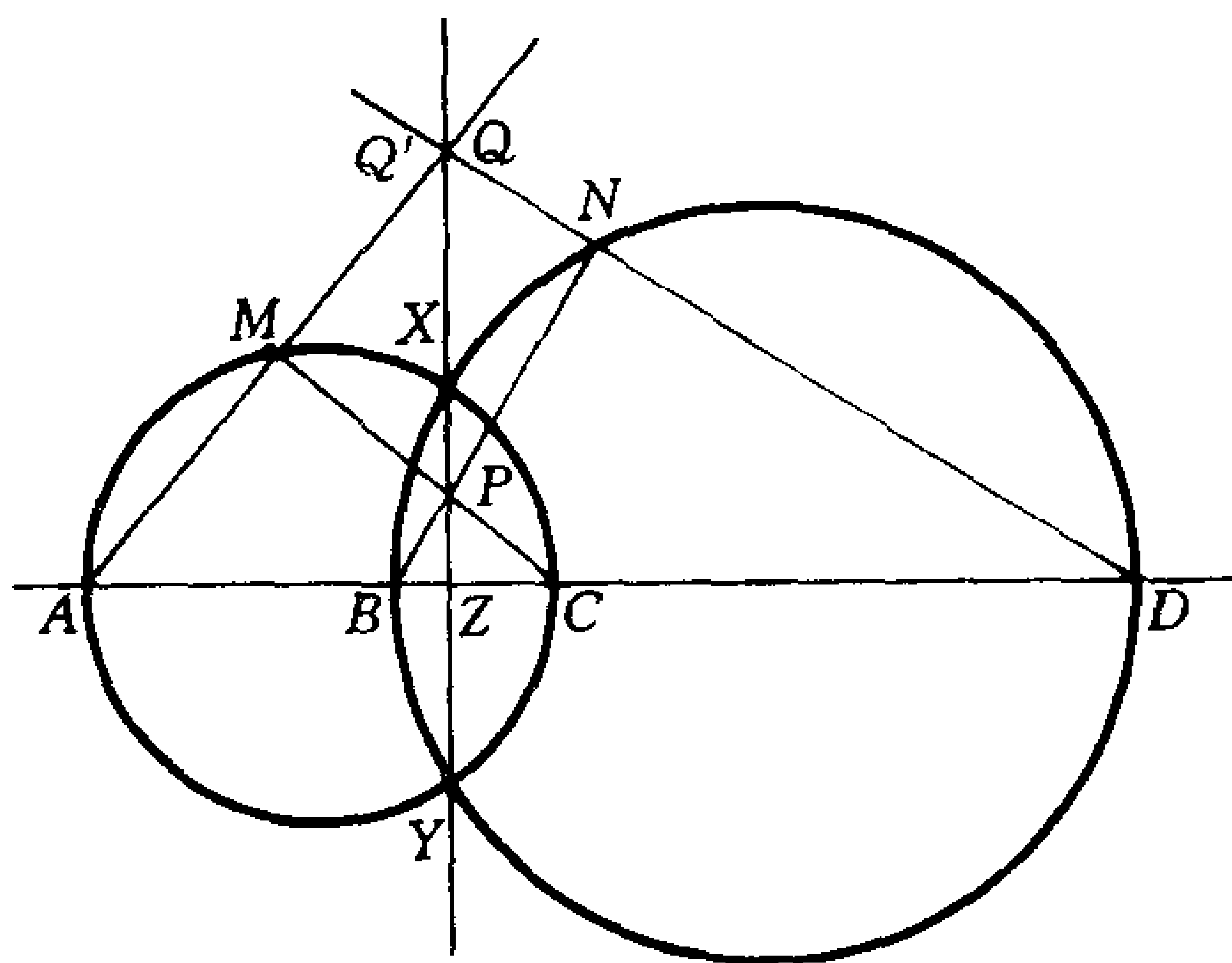


图 1

所示，设 Q 是 AM 和 XY 的交点，Q' 是 DN 和 XY 的交点. 要证点 Q 和 Q' 重合.

由条件易证：直角$\triangle CPZ \backsim \triangle CAM \backsim \triangle QAZ$. 所以，$ZC/ZQ = ZP/AZ$. 由条件知 XZ 是直角$\triangle AXC$ 的斜边上的高，故有 $XZ^2 = AZ \cdot ZC$. 由以上两式得

$$ZQ = ZX^2/ZP.$$

同样，由条件可得：直角$\triangle BPZ \backsim \triangle BDN \backsim \triangle Q'DZ$. 所以，$ZB/ZQ' = ZP/DZ$. 由条件知 XZ 也是直角$\triangle BXD$ 的斜边上的高，故有 $XZ^2 = BZ \cdot ZD$. 因而有 $ZQ' = ZX^2/ZP$. 所以，$ZQ = ZQ'$，即 Q 和 Q' 为同一点.

点 P 在 Z 和 Y 之间时，证明完全相同，其图形是上述情形的图形对直线 AD 的对称图形. 当点 P 在线段 XY 之外（见图 2）时，证明方法也完全一样，留给读者.

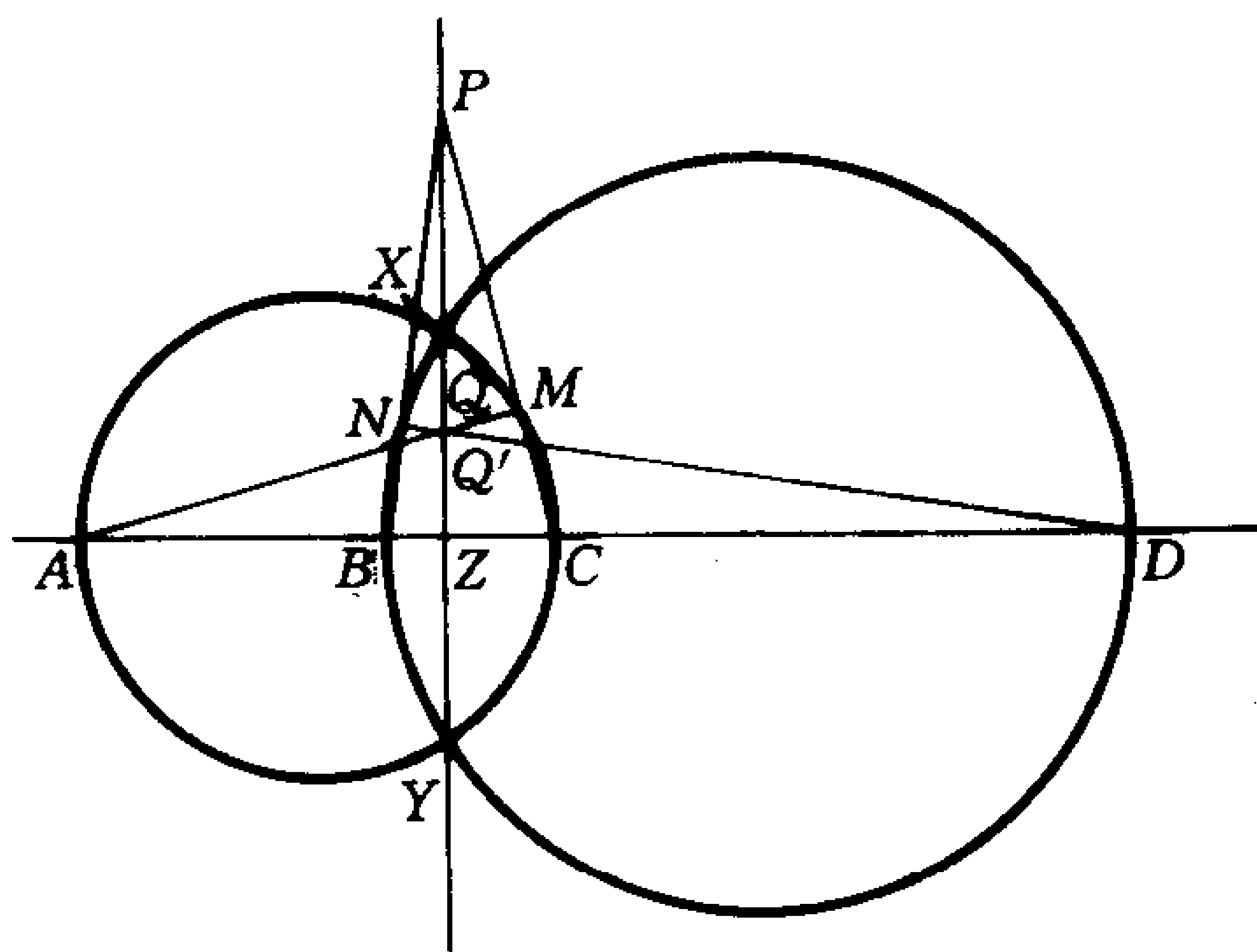


图 2

第 2 题解答 以 I 记所要证的不等式的左边的和式，及设 $S = 1/a + 1/b + 1/c$. 由条件 $abc = 1$ 可得

$$\frac{1}{a^3(b+c)}=\frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{1}{a}\left(\frac{S}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}-1\right)$$

$$=S\left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\right)-\frac{1}{a}=S\left(\frac{S}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}-1\right)-\frac{1}{a}.$$

类似可得

$$\frac{1}{b^3(c+a)}=S\left(\frac{S}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}-1\right)-\frac{1}{b},$$

$$\frac{1}{c^3(a+b)}=S\left(\frac{S}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}-1\right)-\frac{1}{c}.$$

由以上三式推出

$$I=S^2\left(\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}+\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)-4S. \qquad (1)$$

这就算出了 I 的主要部分,即上式中的第一项.

利用正数的算术平均值不小于其调和平均值,即

$$\frac{x+y+z}{3}\geqslant\left(\frac{x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}}{3}\right)^{-1}, \quad x,y,z>0, \qquad (2)$$

可得(取 $x=(1/b+1/c)^{-1}$, $y=(1/c+1/a)^{-1}$, $z=(1/a+1/b)^{-1}$)

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}+\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)\geqslant\frac{3}{2S}. \qquad (3)$$

再利用正数的算术平均值不小于其几何平均值,即

$$\frac{1}{3}(x+y+z) \geqslant \sqrt[3]{xyz}, \quad x, y, z > 0, \tag{4}$$

可得(取 $x=1/a, y=1/b, z=1/c$)

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} = 3, \tag{5}$$

最后一步利用了条件 $abc=1$. 由式(1),(3),及(5)推出

$$I \geqslant \frac{9}{2}S - 4S = \frac{1}{2}S \geqslant \frac{3}{2}.$$

这就证明了所要结论. 本题的困难在于不能直接对 I 应用不等式(2)和(4),必须先求出 I 的精确表达式(1).

本题的另一解法是巧妙地利用 Cauchy 不等式:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2), \tag{6}$$

其中 x_i, y_i 为实数. 取

$$x_1 = \sqrt{ab+ac}, \quad x_2 = \sqrt{bc+ba}, \quad x_3 = \sqrt{ca+cb},$$

$$y_1 = (ax_1)^{-1}, \quad y_2 = (bx_2)^{-1}, \quad y_3 = (cx_3)^{-1}.$$

利用不等式(6)及 $abc=1$,我们有

$$\begin{aligned} I &= (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \\ &\geqslant (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1}(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\ &= (2ab + 2bc + 2ca)^{-1}(1/a + 1/b + 1/c)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right), \end{aligned}$$

由此及式(5)即得 $I \geqslant 3/2$.

第 3 题解答 先讨论 $n=4$ 的情形. 平面上任意四点,在

满足条件(i)时，其位置关系必为以下两种情况（为什么）[①]：(a)有一点在其他三点构成的三角形内部(见图 3)；(b) 四点

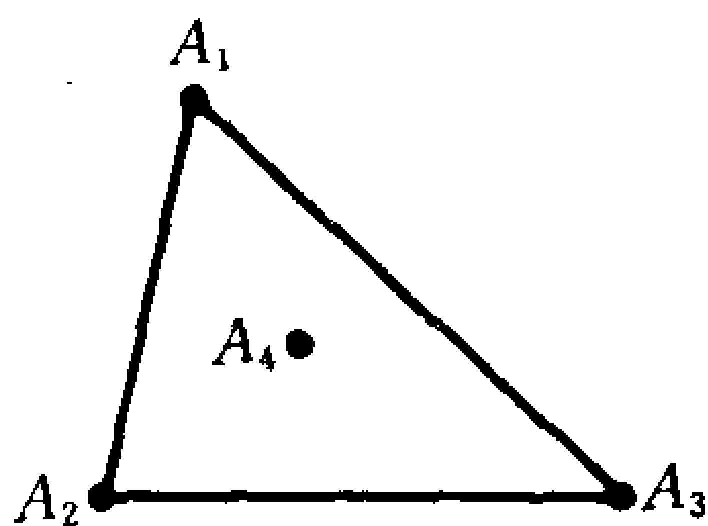


图 3

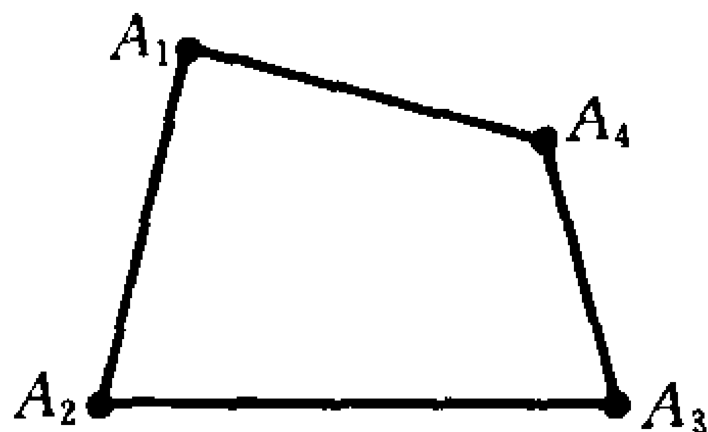


图 4

构成一个凸四边形(见图 4). 以 S_{ijk} 记 $\triangle A_iA_jA_k$ 的面积. 如果存在满足条件(ii)的实数 r_1,r_2,r_3,r_4. 那么，在情况(a)有

$$S_{123}=S_{124}+S_{234}+S_{314},$$

即满足

$$r_4=-\frac{1}{3}(r_1+r_2+r_3); \tag{1}$$

在情况(b)有

$$S_{123}+S_{341}=S_{124}+S_{234},$$

即满足

$$r_1+r_3=r_2+r_4. \tag{2}$$

下面来给出具体例子，说明 $n=4$ 是满足要求的整数. 在情况(a)，取 $\triangle A_1A_2A_3$ 为边长为 2 的等边三角形，A_4 为其中心，不难验证，这时取

$$r_1=r_2=r_3=\sqrt{3}/3,\quad r_4=-\sqrt{3}/3,$$

就满足要求. 在情况(b)，取 $A_1A_2A_3A_4$ 为边长为 1 的正方形. 不难验证，这时取

---

① 参看本题答案的最后一段.

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1/6,$$

就满足要求. 应该指出,对任意给定满足条件(i)的四点 A_1, A_2, A_3, A_4, 无论哪种情形,都一定存在唯一的一组实数 r_1, r_2, r_3, r_4, 满足条件(ii). 证明留给读者.

下面来证明:当 $n \geqslant 5$ 时,一定不存在满足条件(i)和(ii)的点与实数. 显见,只要证明 $n=5$ 时不存在即可. 先来讨论平面上满足条件(i)的任意五点的位置关系. 这时可能出现如下三种情形:(Ⅰ)存在三点使得其他两点均在这三点构成的三角形内部;(Ⅱ)不出现情形(Ⅰ),但存在三点使其构成的三角形内部有另外的一点;(Ⅲ)任意三点所构成的三角形内均不含有另外的点. 我们来证明在这三种情形,均不可能取到满足条件(ii)的实数 r_1, r_2, r_3, r_4, r_5. 用反证法. 假设能取到这样的 $r_1, \cdots, r_5$.

在情形(Ⅰ)(见图 5),由式(1)知,$r_4 = r_5$. 因此,

$$S_{124} = S_{125}, \quad S_{234} = S_{235}.$$

由于点 A_4, A_5 在直线 A_1A_2 的同侧,所以 $A_4A_5 \parallel A_1A_2$. 同理有 $A_4A_5 \parallel A_2A_3$. 这不可能,矛盾.

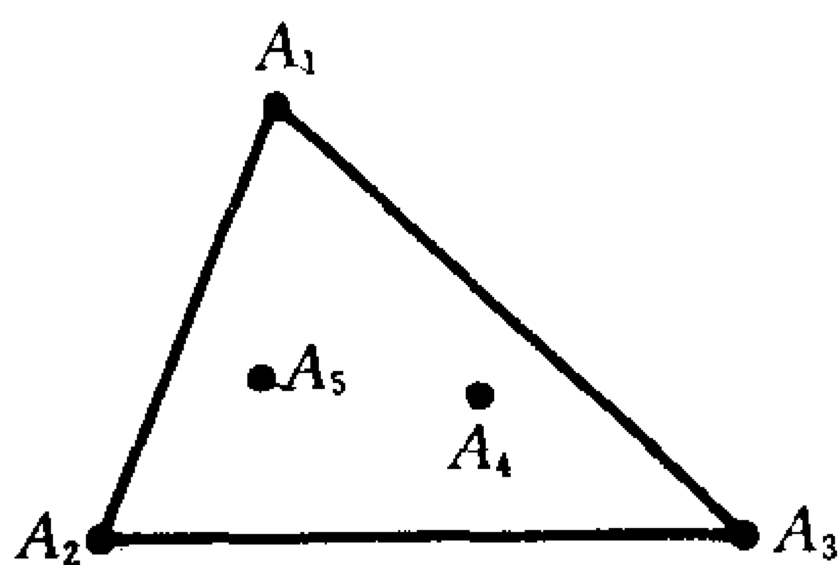


图 5

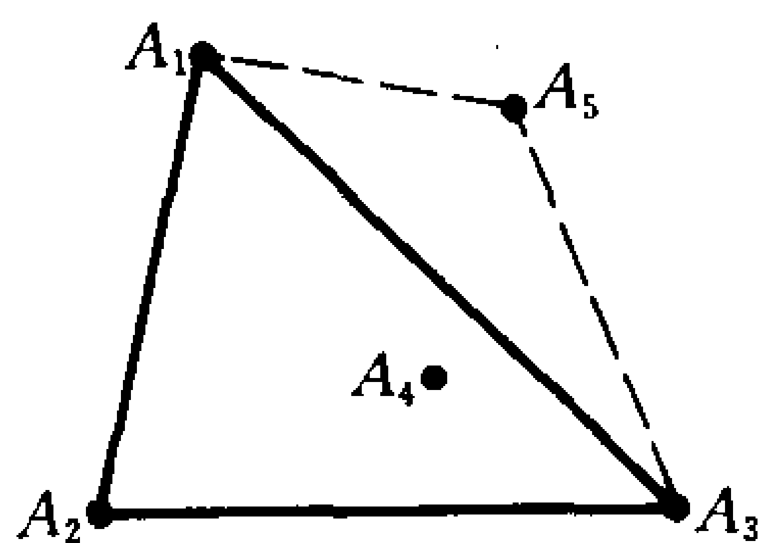


图 6

在情形(Ⅱ)(见图 6). 设 A_4 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 内. 由于不能出现情形(Ⅰ),这时 A_1, A_2, A_3, A_5 必构成一个凸四边形(为什么). 由式(1)得

$$r_4 = -\frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3).$$

这时点 A_4 必在$\triangle A_1A_2A_5$ 或$\triangle A_2A_3A_5$ 内，不妨设前者成立，则由式(1)推出

$$r_4 = -\frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_5).$$

所以，$r_3 = r_5$. 因此，

$$S_{123} = S_{125}, \quad S_{143} = S_{145}$$

由于点 A_3，A_5 在直线 A_1A_2 同侧，所以，$A_3A_5 /\!/ A_1A_2$. 同理有 $A_3A_5 /\!/ A_1A_4$. 这不可能，矛盾.

在情形(Ⅲ)(见图 7). 这时任意四点均构成凸四边形(为什么). 考虑 $A_1A_2A_3A_4$ 及 $A_1A_2A_3A_5$ 这两个凸四边形. 由式(2)知

$$r_1 + r_3 = r_2 + r_4, \quad r_1 + r_3 = r_2 + r_5.$$

所以 $r_4 = r_5$. 因而有，

$$S_{124} = S_{125}, \quad S_{234} = S_{235}.$$

同前讨论一样，推出 $A_4A_5 /\!/ A_1A_2$，$A_4A_5 /\!/ A_2A_3$. 这不可能，矛盾. 证毕.

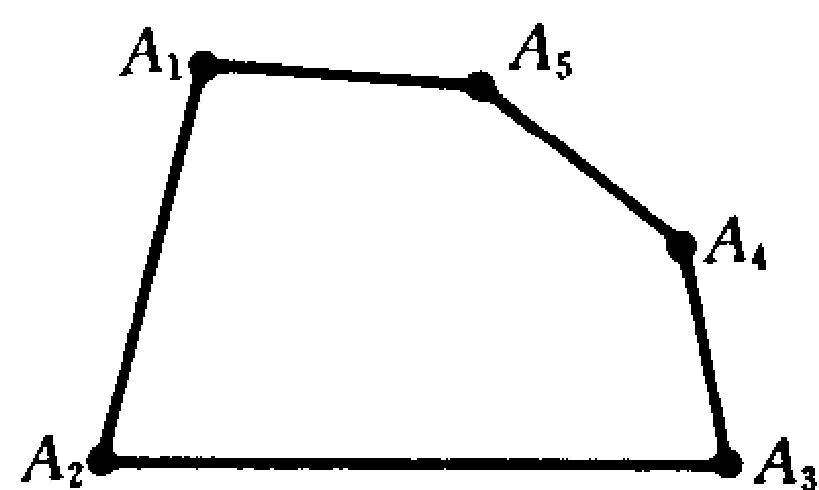


图 7

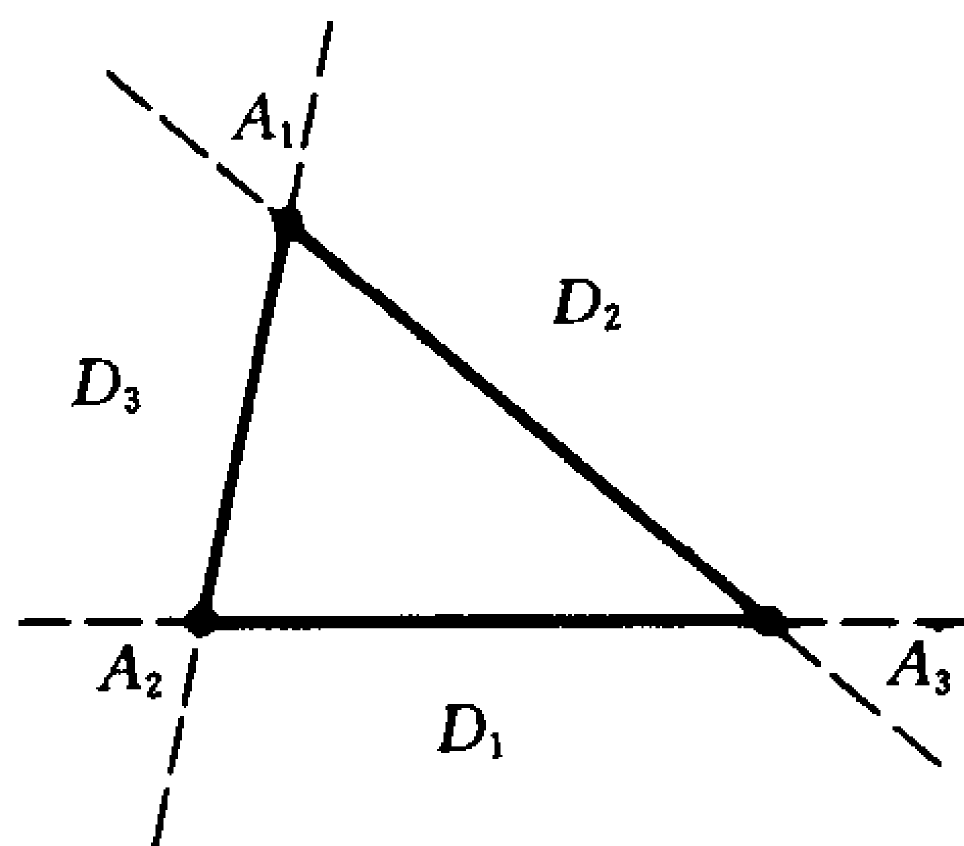


图 8

应该指出，证明本题的关键是基于这样一个事实(见图8)：对满足条件(i)的四个点 A_1, A_2, A_3, A_4，当且仅当 A_4 属于区域 D_1, D_2, D_3 内时，$A_1A_2A_3A_4$ 构成一个凸四边形；而在其他情形，则必有一点在其他三点构成的三角形之内. 此外，任给满足条件(i)的五个点，至少有四个点构成一个凸四边形. 更精确地说，在情况(Ⅰ)恰有一个凸四边形；在(Ⅱ)恰有三个凸四边形；在(Ⅲ)恰有五个凸四边形，即任意四点均构成一个凸四边形. 请读者自己证明这些结论. 更一般地，可讨论满足条件(i)的 n 个点，所构成的凸四边形，或凸多边形问题. 在几何学中，要讨论位置关系的问题，一般都是比较困难的.

第4题解答 当 x_i 均等于1时满足条件，所以若存在所要求的最大值 x_0，则必大于等于1. 当取定 $x_{i-1}(i\geqslant 1)$后，由条件(ii)知，x_i 所能取的值必满足二次方程

$$2x^2-\left(x_{i-1}+\frac{2}{x_{i-1}}\right)x+1=(2x-x_{i-1})\left(x-\frac{1}{x_{i-1}}\right)=0.$$

所以必有

$$x_i=\frac{1}{2}x_{i-1} \text{ 或 } x_i=\frac{1}{x_{i-1}}. \tag{1}$$

显见，这两个值均满足条件(ii). 因此，从初始值 x_0 开始，所能取的序列中的数必为以下形式：

$$2^k x_0,\quad 2^k x_0^{-1},\quad k \text{ 为整数}.$$

由于 $x_0\geqslant 1$，所以，为使(i)成立 x_{1995} 可能取值的形式是：

$$x_0(2^k x_0 \text{ 中的 } k=0)\text{，或 } 2^k x_0^{-1}, k \text{ 为正整数}.$$

下面来证明：x_{1995} 仅可能取 $2^k x_0^{-1}$ 的形式，且最大可能取 $k=1994$. 因此，本题所求的最大值为 $x_0=2^{997}$.

我们先来分析满足条件(ii)的序列所可能取值的途径. 我们用图来表示. x_0 取定后,x_1 可能取的值由下图"→"所示:

$$\begin{array}{ccc} x_0 & \rightarrow & 2^{-1}x_0 \\ \downarrow & & \\ x_0^{-1} & & \end{array}$$

若取 $x_1=x_0^{-1}$,则 x_2 可能取的值可图示为:

$$\begin{array}{ccc} & & x_0 \\ & & \uparrow \\ 2^{-1}x_0^{-1} & \leftarrow & x_0^{-1} \end{array}$$

若取 $x_1=2^{-1}x_0$,则 x_2 可能取的值可图示为:

$$\begin{array}{ccc} 2^{-1}x_0 & \rightarrow & 2^{-2}x_0 \\ \downarrow & & \\ 2x_0^{-1} & & \end{array}$$

把这三个图合起来得到:

$$\begin{array}{ccccc} & & x_0 & \rightarrow & 2^{-1}x_0 & \rightarrow & 2^{-2}x_0 \\ & & \uparrow\downarrow & & \downarrow & & \\ 2^{-1}x_0^{-1} & \leftarrow & x_0^{-1} & & 2x_0^{-1} & & \end{array}$$

所以,序列 x_0,x_1,x_2 所可能取的值,只要在上图中,从 x_0 出发,依次沿"→"所指方向来取值 x_1,x_2,共有四种可能. 按此道理,可以用这样的图示方式来表示序列 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 所有可能取值的途径:从下面图 9 中的 x_0 出发,依次按"→"所指方向来取下一个值,直到取 x_n. 显然共有 2^n 种可能的途径. 如

$$x_0,2^{-1}x_0,2x_0^{-1},x_0^{-1},x_0,2^{-1}x_0,2^{-2}x_0,2^2x_0.$$

$$x_0,x_0^{-1},2^{-1}x_0^{-1},2^{-2}x_0^{-1},2^2x_0,2x_0,x_0.$$

分别给出了 $n=7,n=6$ 的两种序列的取值途径.

由取值图的结构容易看出:若序列 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的某一取值途径,使 x_n 确实回到图中的 x_0,那么,这个序列的取值图必是由一个封闭的圈路(可重复)表示,注意到 $x_n=x_0$,所以,

在第一行取值的个数必比第二行取值的个数多 1. 因此，n 必为偶数. 现在 $n=1995$，所以这种情形不可能出现. 因此，仅可能是

$$x_0 = x_n = 2^k x_0^{-1},$$

显见，k 愈大，x_0 愈大. 由图可知最大可取 $k=1994$. 这序列仅可能是：

$$\begin{cases} x_i = 2^{-i}x_0, & 0 \leqslant i \leqslant 1994; \\ x_{1995} = 2^{1994}x_0^{-1}. \end{cases}$$

即 $x_0=2^{997}$. 证毕.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
\cdots\to & 2^k x_0 & \to & 2^{k-1}x_0 & \to\cdots\to & 2^2x_0 & \to & 2x_0 & \to & x_0 & \to & 2^{-1}x_0 & \to & 2^{-2}x_0 & \to\cdots\to & 2^{-k+1}x_0 & \to & 2^{-k}x_0 & \to\cdots \\
 & \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow & \\
\cdots\leftarrow & 2^{-k}x_0^{-1} & \leftarrow & 2^{-k+1}x_0^{-1} & \leftarrow\cdots\leftarrow & 2^{-2}x_0^{-1} & \leftarrow & 2^{-1}x_0^{-1} & \leftarrow & x_0^{-1} & \leftarrow & 2x_0^{-1} & \leftarrow & 2^2x_0^{-1} & \leftarrow\cdots\leftarrow & 2^{k-1}x_0^{-1} & \leftarrow & 2^k x_0^{-1} & \leftarrow\cdots
\end{array}$$

图 9　k 为正整数

第 5 题解答　在图 10 中，由条件知△BCD 和△EFA 均

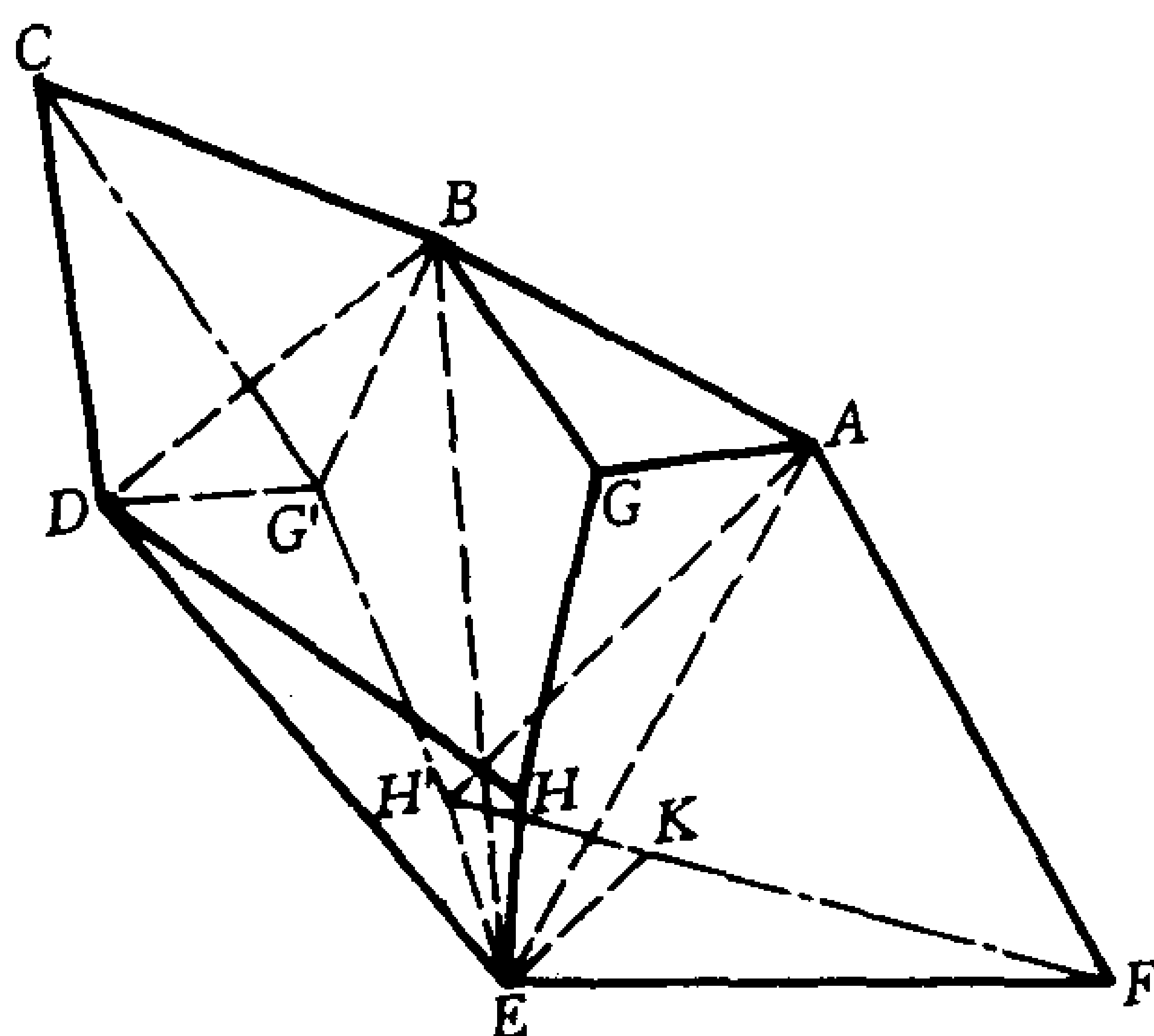


图　10

是等边三角形，所以 $AB=BD, AE=ED$，因而 BE 是四边形 $ABDE$ 的对称轴(为什么)。设 G', H' 分别是 G, H 关于轴 BE 的对称点。显有 $GH=G'H'$，及

$\triangle ABG \cong \triangle DBG', AG = DG', BG = BG', \angle DG'B = 120°,$

$$\triangle DEH \cong \triangle AEH', DH = AH', EH = EH',$$

$$\angle AH'E = 120°.$$

由于 $CG'+G'H'+H'F \geqslant CF$，由以上各式知，若能证明

$$CG' = BG' + DG', \tag{1}$$

$$FH' = AH' + EH', \tag{2}$$

则立即推出所要结论。下面来证式(2)，式(1)可同理推出。

由点 F 分别作 $H'A, H'E$ 的垂线 FP, FQ(见图 11)。显

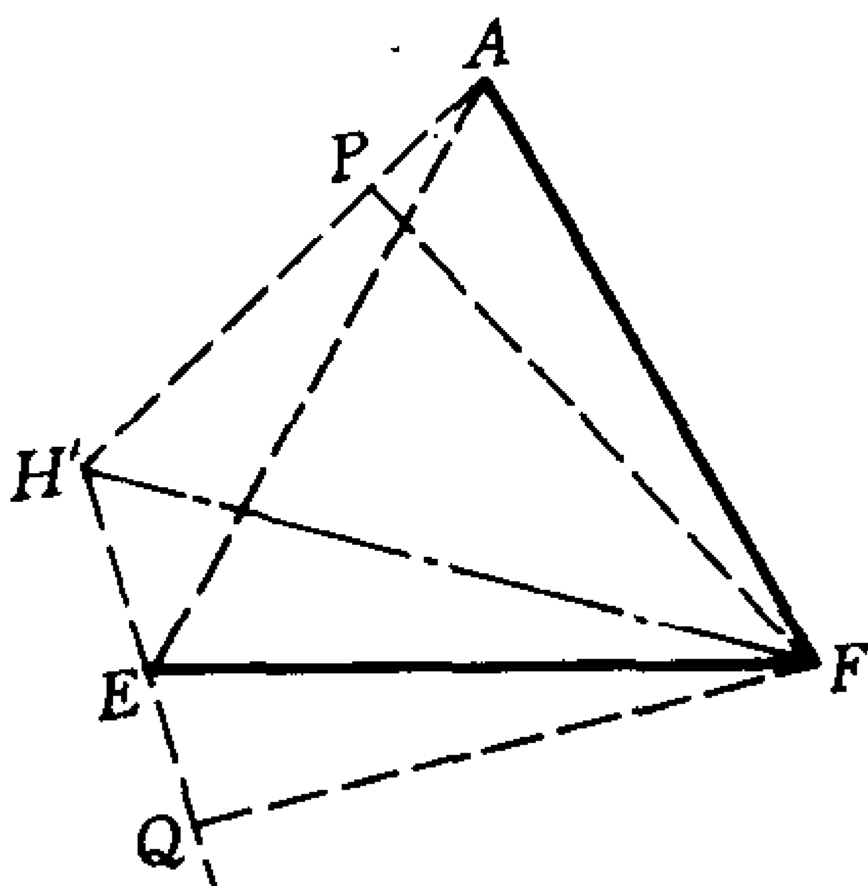


图 11

然有 $\angle PFQ=60°$，及 $\angle AFP=\angle EFQ$(为什么)。因而直角 $\triangle AFP \cong \triangle EFQ, EP=EQ$。所以 $H'F$ 是 $\angle EH'A$ 的角平分线，$\angle AH'F=\angle EH'F=60°$。

作 $EK /\!/ H'A$，交 $H'F$ 于 K。显见，$\triangle H'EK$ 为等边三角形。所以，

$$H'E = EK = KH'. \tag{3}$$

而由 $\angle H'EK=\angle AEF=60°$，推出 $\angle H'EA=\angle KEF$。注意

到 $AE=EF$，就得$\triangle AEH'\cong\triangle FEK$. 由此及式(3)就推出式(2). 证毕.

第 6 题解答 这种子集的个数就是同余方程

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_p\equiv 0(\bmod\ p),\\ 1\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_p\leqslant 2p\end{cases}\tag{1}$$

的解数 N. 下面利用组合及数论知识来解. 我们要证明：

$$N=1+\frac{1}{p}\sum_{r=1}^{p-1}\binom{p}{p-r}\binom{p}{r}+1.\tag{2}$$

由此可推出

$$N=\frac{1}{p}\left[\binom{2p}{p}-2\right]+2.\tag{3}$$

我们先来证明由式(2)可推出式(3). $\binom{2p}{p}$就是在 $2p$ 个元素中任取 p 个元素的组合数. 而这相当于把这 $2p$ 个元素分为两组 A,B，每组 p 个元素，对 $r=0,1,2,\cdots,p$，在 A 组任意取定 r 个元素，然后再在 B 组任取 $p-r$ 个元素. 而这样的取法共有

$$\sum_{r=0}^{p}\binom{p}{r}\binom{p}{p-r}=2+\sum_{r=1}^{p-1}\binom{p}{r}\binom{p}{p-r}$$

个，由于它等于$\binom{2p}{p}$，由此及式(2)就推出式(3).

下面来证式(2). 对同余方程(1)的每一组解

$$x_1,x_2,\cdots,x_p,\tag{4}$$

必有唯一的 r，$0\leqslant r\leqslant p$，使这组解分为两部分：

$$1\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_r\leqslant p<x_{r+1}<\cdots<x_p\leqslant 2p.\tag{5}$$

显见，$r=0$ 时不存在前一部分，而后一部分仅可能取

$$x_i = p + i, \quad 1 \leqslant i \leqslant p.$$

这的确是(1)的解. $r=p$ 时不存在后一部分，而前一部分仅可能取

$$x_i = i, \quad 1 \leqslant i \leqslant p,$$

这的确也是(1)的解. 现来讨论 $1 \leqslant r \leqslant p-1$ 的情形.

对取定的 $r, 0 \leqslant r \leqslant p$，以 N_r 表示同余方程(1)满足条件(5)的解数. 因此(利用 $N_0 = N_p = 1$)

$$N = \sum_{r=0}^{p} N_r = 1 + \sum_{r=1}^{p-1} N_r + 1. \tag{6}$$

我们来证明

$$N_r = \frac{1}{p}\binom{p}{p-r}\binom{p}{r}, 1 \leqslant r \leqslant p-1. \tag{7}$$

由以上两式就推出式(2).

对取定的 $r, 1 \leqslant r \leqslant p-1$，满足条件(5)的全部解可以这样来得到：先在 $p+1, p+2, \cdots, 2p$ 中任意取定 $p-r$ 个变数 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_p$ 的值，这共有 $\binom{p}{p-r}$ 种取法. 对这样任意取定的 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_p$，设

$$x_{r+1} + \cdots + x_p \equiv -c \pmod{p}.$$

那么原解的前一部分 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 可能取的值就是满足同余方程

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_r \equiv c \pmod{p}, \\ 1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_r \leqslant p \end{cases} \tag{8}$$

的全部解，设其解数为 $N_r(c)$. 我们来证明对任意的 $c, N_r(c)$ 均相等. 由于满足 $1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_r \leqslant p$ 的数组(不一定是

(8)的解)$\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$共有$\binom{p}{r}$种取法,所以,由此及$N_r(c)$均相等就推出(为什么)

$$N_r(c)=\frac{1}{p}\binom{p}{r}. \tag{9}$$

因此,式(7)成立.对取定的$r(1\leqslant r\leqslant p-1)$,为证对任意的$c$,$N_r(c)$均相等,只要证对任意的$c$有

$$N_r(c+1)=N_r(c) \tag{10}$$

(为什么),即同余方程(8)与同余方程

$$\begin{cases}y_1+y_2+\cdots+y_r\equiv c+1(\bmod p),\\1\leqslant y_1<y_2<\cdots<y_r\leqslant p\end{cases} \tag{11}$$

的解数相同.为此,我们来建立这两个同余方程的解之间的一一对应关系.设$x_1,x_2,\cdots,x_r$是(8)的一组解,记

$$x_{i+1}-x_i\equiv l_i(\bmod p),1\leqslant l_i\leqslant p,1\leqslant i\leqslant r,$$

当$i=r$时,取$x_{r+1}=x_1$(这不是同余方程(1)中的x_{r+1}).显有(为什么)

$$l_1+l_2+\cdots+l_r=p.$$

由于$r\leqslant p-1$,所以必有某些i,使$l_i\geqslant 2$.设i_0是使$l_i\geqslant 2$的最小的i,即

$$i_0=\min\{i:\ 1\leqslant i\leqslant r,l_i\geqslant 2\}.$$

现取

$$\begin{cases}y_i=x_i, & i\neq i_0,1\leqslant i\leqslant r.\\y_{i_0}\equiv x_{i_0}+1(\bmod p), & 1\leqslant y_{i_0}\leqslant p.\end{cases} \tag{12}$$

容易验证,这样得到的$y_1,y_2,\cdots,y_r$确是同余方程(11)的解,且(8)的不同的解由此对应的(11)的解也不同(留给读者).所以,$N_r(c)\leqslant N_r(c+1)$.反之,对取定的(11)的一组解$y_1,y_2,\cdots,y_r$,记

$$y_i - y_{i-1} \equiv h_i \pmod p, \quad 1 \leqslant h_i \leqslant p, 1 \leqslant i \leqslant r,$$

当 $i=0$ 时,取 $y_{-1}=y_r$. 显有

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_r = p.$$

由于 $r \leqslant p-1$,故必有某些 i,使 $h_i \geqslant 2$. 设 i_1 是使 $h_i \geqslant 2$ 的最小的 i,即

$$i_1 = \min\{i:\ 1 \leqslant i \leqslant r, h_i \geqslant 2\}.$$

取

$$\begin{cases} x_i = y_i, & i \neq i_1, 1 \leqslant i \leqslant r, \\ x_{i_1} \equiv y_{i_1} - 1 & 1 \leqslant x_{i_1} \leqslant p, i = i_1. \end{cases} \tag{13}$$

容易验证,这样得到的 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 确是同余方程(8)的解,且(11)的不同的解由此对应(8)的解也不同. 所以,$N_r(c+1) \leqslant N_r(c)$. 这就证明了式(10),且建立了同余方程(8)和(11)的解之间的一个一一对应关系(为什么). 证毕.

本题的提出者波兰的 Marcin Kuczma 给出了一个非常漂亮简洁的解法. 现介绍如下:

集合 $\{1,2,\cdots,2p\}$ 的每个子集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$(依 $x_1<x_2<\cdots<x_p$ 排列),必存在唯一的 $r(0 \leqslant r \leqslant p)$,把这子集分为满足式(5)的两部分:

$$\{x_1,\cdots,x_r\}, \quad \{x_{r+1},\cdots,x_p\}.$$

对应于 $r=0$ 和 $r=p$ 的子集是唯一的,分别为

$$x_1 = p+1, x_2 = p+2, \cdots, x_p = 2p$$

和

$$x_1 = 1, x_2 = 2, \cdots, x_p = p.$$

显见,这两个子集均满足条件(ii). 由于 p 个元素的子集共有 $\binom{2p}{p}$ 个,所以,相应于 $1 \leqslant r \leqslant p-1$ 的所有 p 个元素的子集个

数为$\binom{2p}{p}-2$. 这样,问题就转化为确定这些子集中满足条件(ii)的子集的个数.

现把这些子集按下述方法来分类:子集$\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$和$\{x'_1,x'_2,\cdots,x'_p\}$称为是属于同一类的,如果(a) 它们对应的$r$相等;(b) $x'_i=x_i,r+1\leqslant i\leqslant p$;(c)存在$m(0\leqslant m<p)$使得

$$x'_i\equiv x_i+m(\text{mod } p),\quad 1\leqslant i\leqslant r,\tag{14}$$

即$\{x'_1,x'_2,\cdots,x'_r\}$是$\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$的一个"模$p$平移","平移距离"为$m$. 容易验证(留给读者): 由这样来确定分类的关系是一个等价关系. 这样就把相应于$1\leqslant r\leqslant p-1$的全部子集分成了两两不相交的等价类.

我们来证明: 每个等价类中的子集个数等于p. 任意取定一个子集$\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$,依次取$m=0,1,2,\cdots,p-1$,由条件(b)和(c)就确定p个子集($m=0$时,即$\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$本身),容易证明(留给读者),由此确定的这p个子集是两两不同的. 此外,对应同一个m的两个子集一定是相同的(为什么). 这就证明了所要结论. 由此推出等价类的个数是

$$\frac{1}{p}\left[\binom{2p}{p}-2\right].\tag{15}$$

下面来确定每一等价类中,满足条件(ii)的子集个数,考虑子集$\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$所属的等价类. 由前面讨论知,这等价类中每个子集$\{x'_1,x'_2,\cdots,x'_p\}$必对应于唯一的$m(0\leqslant m<p)$满足式(14). 因而

$$x'_1+x'_2+\cdots+x'_p\equiv c+mr(\text{mod } p),$$

其中$c=x_1+x_2+\cdots+x_p$. 由于对取定的$c,r(1\leqslant r\leqslant p-1)$,

$$c+mr\equiv 0(\text{mod } p)$$

m有且仅有一解,即这一等价类中仅有一个子集的元素之和

被 p 整除. 所以，在相应于 $1\leqslant r\leqslant p-1$ 的全部子集中满足条件的子集的个数即是等价类的个数，即由式(15)给出，它加上相应于 $r=0$ 和 p 的两个子集就证明了满足题意的子集个数由式(3)给出. 证毕.

细心的读者不难发现，这两个解法实质上是一样的. 但后一解法更巧妙，不易想到.

初等数学问题(4)解答

1. 解 可设$\frac{1}{1992}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，$a,b\in \boldsymbol{N}$，$a\geqslant b$. 显然 $a>1992$，$b>1992$，故可设 $a=1992+x$，$b=1992+y$，$x,y\in \boldsymbol{N}$，$x\geqslant y$. 于是由

$$\frac{1}{1992}=\frac{1}{1992+x}+\frac{1}{1992+y},$$

得

$$(1992+x)(1992+y)=1992(2\times 1992+x+y),$$

$$xy=1992^2=2^6\cdot 3^2\cdot 83^2, \qquad (1)$$

由(1)知 x,y 都是 1992^2 的因数. $2^6\cdot 3^2\cdot 83^2$ 的不同因数有 $7\times 3\times 3$个，由对称性满足 $x\geqslant y$ 的 x 取值应有

$$\frac{7\times 3\times 3+1}{2}=32\text{ 个}.$$

x 确定后 y 随之被确定，故所求不同的分拆数目是 32. 为了明确起见，我们把这 32 种分拆列在表 1 中.

为了求出所有四位整数作为分母的单位分数分拆. 只需利用条件：$1992<a\leqslant 9999$，$1992<b\leqslant 9999$ 得到 $1\leqslant x\leqslant 8007$，$1\leqslant y\leqslant 8007$，再结合条件 $x\geqslant y$ 及 $xy=1992^2$，得 $495.5\leqslant y\leqslant 1992$. 从而知 y 可取 $2^3\cdot 83$，$2^4\cdot 83$，$3^2\cdot 83$，$2^6\cdot 3^2$，$2\cdot 3\cdot 83$，$2^2\cdot 3\cdot 83$，$2^3\cdot 3\cdot 83$，$2\cdot 3^2\cdot 83$. 所以有八组分拆是四位整数作为分母的单位分数分拆. 从表 1 中亦可直接验证这一结果的正确性.

表 1

序号	x	y	a	b
1	1992^2	1	3970056	1993
2	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 83^2$	2	1986024	1994
3	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 83^2$	2^2	994008	1996
4	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 83^2$	2^3	498000	2000
5	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 83^2$	2^4	249996	2008
6	$2 \cdot 3^2 \cdot 83^2$	2^5	125994	2024
7	$3^2 \cdot 83^2$	2^6	63993	2056
8	$2^6 \cdot 3 \cdot 83^2$	3	1324680	1995
9	$2^6 \cdot 83^2$	3^2	442888	2001
10	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 83$	83	49800	2075
11	$2^5 \cdot 3 \cdot 83^2$	$2 \cdot 3$	663336	1998
12	$2^4 \cdot 3 \cdot 83^2$	$2^2 \cdot 3$	332664	2004
13	$2^3 \cdot 3 \cdot 83^2$	$2^3 \cdot 3$	167328	2016
14	$2^2 \cdot 3 \cdot 83^2$	$2^4 \cdot 3$	84660	2040
15	$2 \cdot 3 \cdot 83^2$	$2^5 \cdot 3$	43326	2088
16	$3 \cdot 83^2$	$2^6 \cdot 3$	22659	2184
17	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 83$	$2 \cdot 83$	25896	2158
18	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 83$	$2^2 \cdot 83$	13944	2324
19	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 83$	$2^3 \cdot 83$	7968	2656
20	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 83$	$2^4 \cdot 83$	4980	3320
21	$2^6 \cdot 3 \cdot 83$	$3 \cdot 83$	17928	2241
22	$2^6 \cdot 83$	$3^2 \cdot 83$	7304	2739
23	$2^5 \cdot 83^2$	$2 \cdot 3^2$	222440	2010
24	$2^4 \cdot 83^2$	$2^2 \cdot 3^2$	112216	2028
25	$2^3 \cdot 83^2$	$2^3 \cdot 3^2$	57104	2064
26	$2^2 \cdot 83^2$	$2^4 \cdot 3^2$	29548	2136
27	$2 \cdot 83^2$	$2^5 \cdot 3^2$	15770	2280
28	83^2	$2^6 \cdot 3^2$	8881	2568
29	$2^5 \cdot 3 \cdot 83$	$2 \cdot 3 \cdot 83$	9960	2490
30	$2^4 \cdot 3 \cdot 83$	$2^2 \cdot 3 \cdot 83$	5976	2988
31	$2^3 \cdot 3 \cdot 83$	$2^3 \cdot 3 \cdot 83$	3984	3984
32	$2^5 \cdot 83$	$2 \cdot 3^2 \cdot 83$	4648	3486

2. 解 我们先证明一个有趣的性质：若 X 是一个 n 位正整数，Y 是将组成 X 的各位数字相加得到的正整数，则 $X \equiv Y \pmod 9$

证明 设 $X = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1}$，$a_i \in \{0,1,2,\cdots,9\}$，$i = 1, 2, \cdots, n$，$a_n \neq 0$，则 $Y = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$. $X = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot 10^{k-1}$. 注意：$10^{k-1} \equiv 1 \pmod 9$，$k = 1, 2, \cdots, n$；$a_k \cdot 10^{k-1} \equiv a_k \pmod 9$，$k = 1, 2, \cdots, n$，所以

$$X = \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{k-1} \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k = Y \pmod 9.$$

现在我们回到原始问题，由我们证明的性质知

$$N_1 \equiv N_2, \quad N_2 \equiv N_3, \quad N_3 \equiv N_4 \pmod 9,$$

从而

$$N_1 \equiv N_i \pmod 9, i = 2, 3, 4.$$

又

$$1993 \equiv 4 \pmod 9, \quad 4^3 = 64 \equiv 1 \pmod 9,$$

所以

$$N_1 = 1993^{1993} = (4^3)^{664} \cdot 4 \pmod 9 \equiv 4 \pmod 9),$$

$$N_2 \equiv N_3 \equiv N_4 \equiv 4 \pmod 9.$$

注意到 $\lg N_1 = 6575.9$，N_1 是一个 6576 位的整数，故 $N_2 < 6576 \times 9 = 59184$. 即 N_2 不超过 5 位的整数，从而 $N_3 < 5 \times 9 = 45$. 又由 $N_3 \equiv 4 \pmod 9$，知 N_3 只可能是 40，31，22，13，4 这其中的某一个，故知 $N_4 = 4$.

3. 解 正方体有 12 条棱，因而有 12 个中点，这 12 个点中任意三个不共线，每三个点可以确定一个平面，这样有平面 $C_{12}^3 = 220$ 个(其中有些平面被重复计数). 我们先来看恰过四

个中点的平面有多少个，可以分三种情况.

（1）正方体的六个面；

（2）正方体三组平行平面的正中截面，如图 1 所示：$ACKI$，$EFGH$，$BDMS$.

（3）相对于每一条棱如图 2 所示的平面 $ABCD$，这类平面有 12 个.

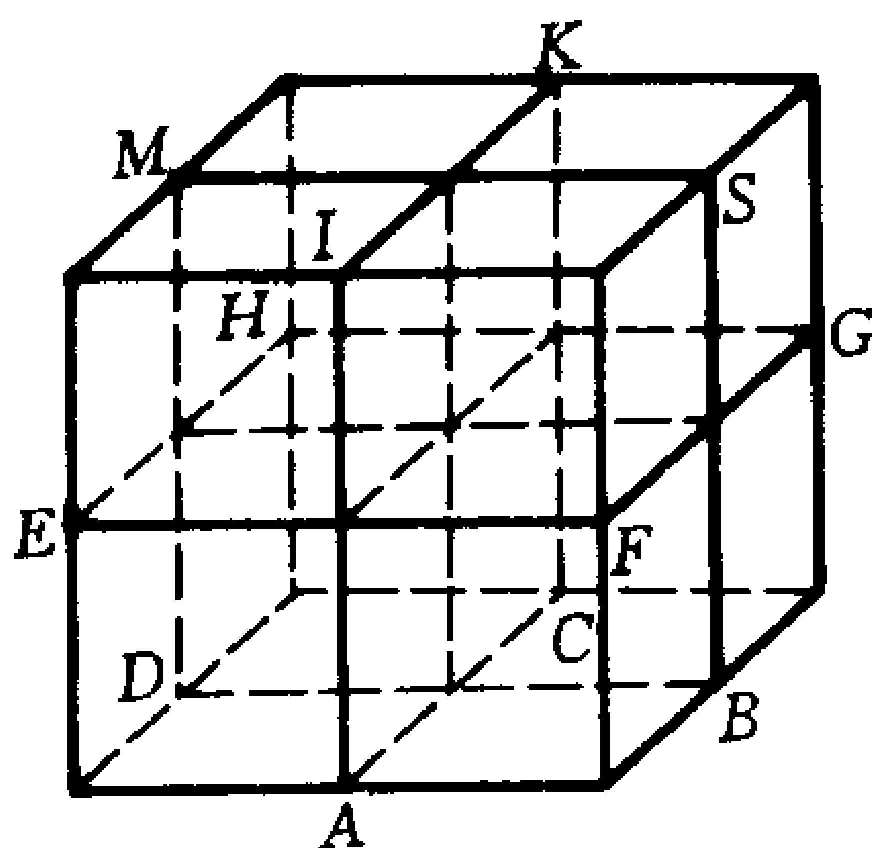


图 1

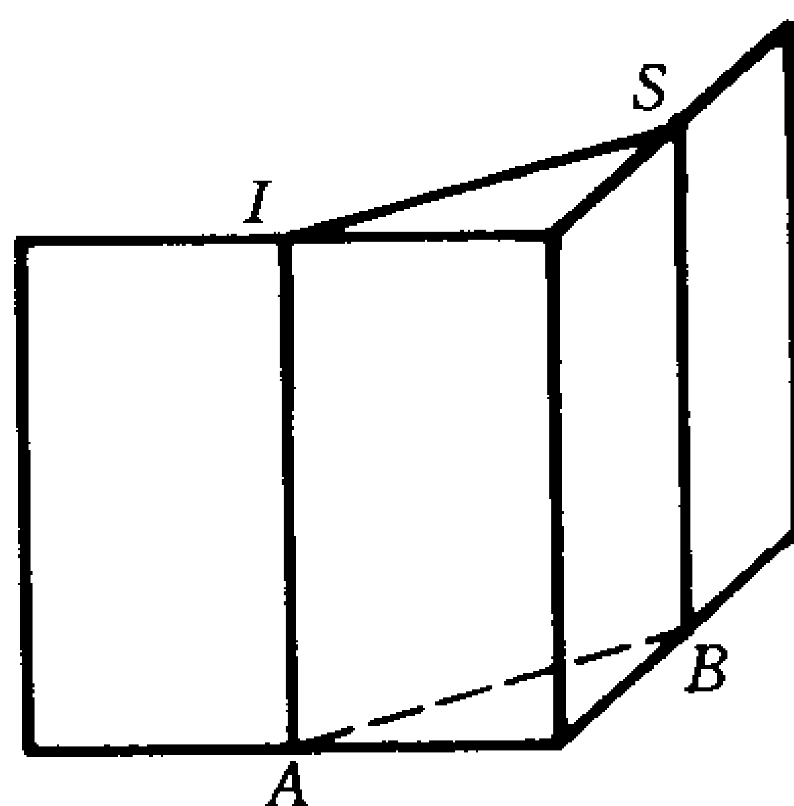


图 2

这样恰过四个中点的平面有 $6+3+12=21$，它们中的每一个在初始的计数中被计数了 $C_4^3=4$ 次，故应从总数中扣去 $(4-1)\times21=63$ 个.

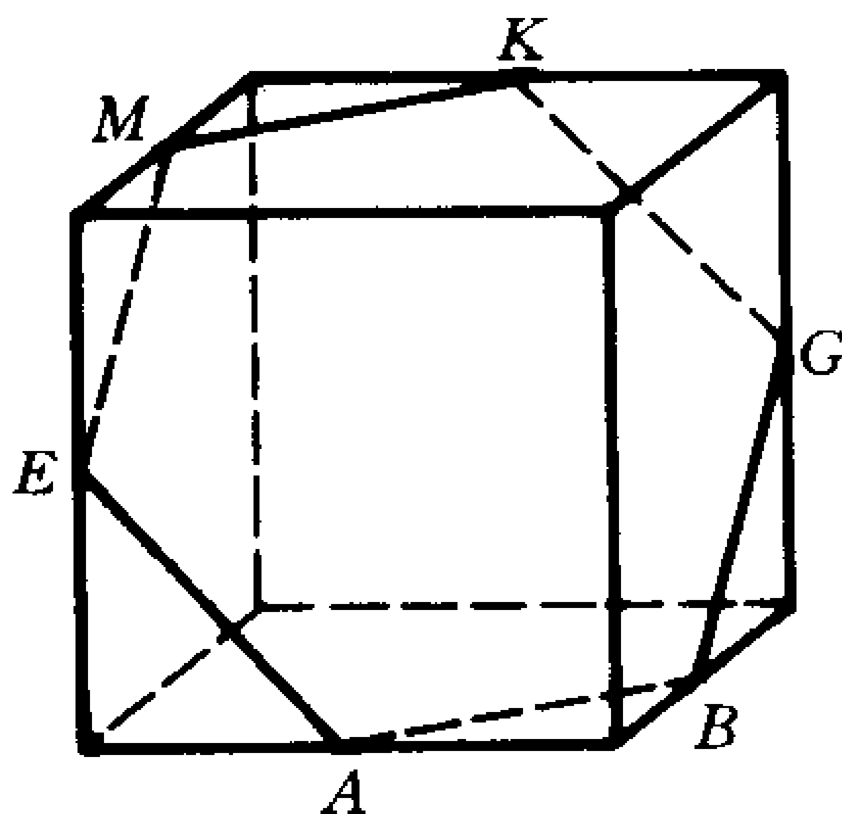


图 3

我们再来看恰过六个中点平面. 如图 3 所示平面

$ABGKME$ 就是其中一个，这类平面有四个，在初始计数中每一个被计数 $C_6^3=20$ 次，故应从总数中扣去

$$(20-1)\times 4=70(\text{个})$$

所以所求至少过三条棱的中点的平面总数为

$$220-(63+70)=81(\text{个}).$$

4. 解 设 $AB:CB:AC=1:x:y$. 于是有

$$\sqrt{961}\left(1+\frac{x}{y}\right)=CB=\sqrt{960}\left(x+\frac{1}{y}\right),$$

两边平方后整理得

$$(x^2+y^2)961+2xy\cdot 961=960(xy)^2+2xy\cdot 960+960,$$

因为 $x^2+y^2=1$，所以

$$960(xy)^2=1+2xy,$$

解关于 xy 的一元二次方程得：$xy=1/30$.

再由

$$AC=\sqrt{961}\left(1+\frac{y}{x}\right)=31\left(1+\frac{y}{x}\right),$$

$$CB=\sqrt{961}\left(1+\frac{x}{y}\right)=31(1+\frac{x}{y}),$$

所以

$$AC+CB=31\left(2+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)=31\left(2+\frac{1}{xy}\right)=31\cdot 32=992.$$

5. 解 (1) $f(x)=\begin{cases}1-2x, & x\in[0,1/2),\\ x-1/2, & x\in[1/2,1].\end{cases}$

$$f\left(\frac{7}{9}\right)=\frac{7}{9}-\frac{1}{2}=\frac{5}{18},$$

$$f^{(2)}\left(\frac{7}{9}\right)=f\left(\frac{5}{18}\right)=1-2\cdot\frac{5}{18}=\frac{4}{9},$$

$$f^{(3)}\left(\frac{7}{9}\right)=f\left(\frac{4}{9}\right)=1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9},$$

$$f^{(4)}\left(\frac{7}{9}\right)=f\left(\frac{1}{9}\right)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}.$$

注意到$\frac{7}{9}$满足 $f^{(4)}\left(\frac{7}{9}\right)=\frac{7}{9}$，它是 4 次 f 迭代的不动点. $1993=4\times498+1$，$f^{(1993)}\left(\frac{7}{9}\right)=f\left(\frac{7}{9}\right)=\frac{5}{18}$.

(2) 由(1)中计算知$\frac{7}{9}\xrightarrow{f}\frac{5}{18}\xrightarrow{f}\frac{4}{9}\xrightarrow{f}\frac{1}{9}\xrightarrow{f}\frac{7}{9}$，因此 $7/9,5/18,4/9,1/9$ 都满足 $f^{(4)}(x)=x$，当然它们也一定满足 $f^{(12)}(x)=x$，故知它们是 A 的元素. 为了找出 A 的其他元素，我们注意到 12 的因数有 1,2,3,4,6,12，而这些因数的和恰好是 28，这就提示我们可以通过找出 $f^{(n)}(x)=x,n\mid12$ 的根来确定 A 中的某些元素.

从 $f(x)$的图像不难看出 $x=1/3$是 $f(x)=x$ 的根，即 $f(1/3)=1/3$. 因此 $1/3\in A$(见图 4).

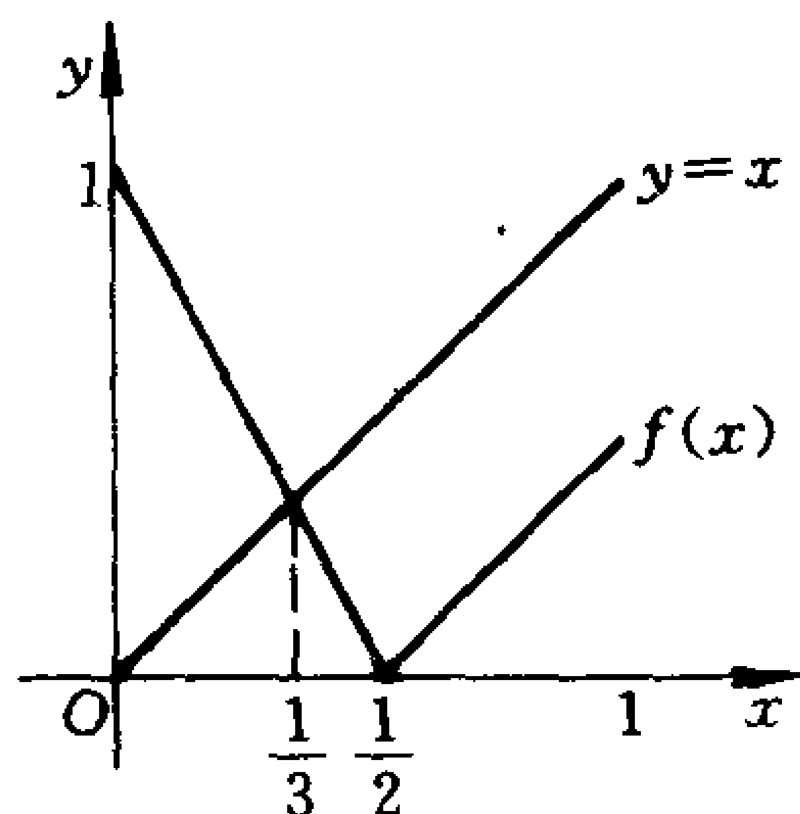


图 4

又见 $0\xrightarrow{f}1\xrightarrow{f}1/2\xrightarrow{f}0$，故知 $0,1/2,1$ 都是 $f^{(3)}(x)=x$ 的根，因此，$0,1/2,1\in A$.

由方程组

$$\begin{cases}x-1/2=y,\\1-2y=x,\end{cases}$$

解得 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{1}{6}$，故知$\frac{2}{3}\xrightarrow{f}\frac{1}{6}\xrightarrow{f}\frac{2}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{6}$是 $f^{(2)}(x)=x$ 的根. 因此，$2/3,1/6\in A$.

为了求出 $f^{(6)}(x)=x$ 和 $f^{(12)}(x)=x$ 的根，我们先求出 $g(x)=1-2x$的 n 次迭代表达式如下：

$$g^{(n)}(x)=(-2)^n(x-1/3)+1/3.$$

这样由方程组

$$\begin{cases} x_1=f(x_0)=x_0-1/2, \quad x_0\in[1/2 \quad 1], \\ x_0=x_6=f^{(5)}(x_1)=g(x_1)=(-2)^5(x_1-1/3)+1/3 \end{cases}$$

可以构造性地求得 $f^{(6)}(x)=x$ 的根如下：

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_0 & \xrightarrow{f} & x_1 & \xrightarrow{f} & x_2 & \xrightarrow{f} & x_3 & \xrightarrow{f} & x_4 & \xrightarrow{f} \\ \| & & \| & & \| & & \| & & \| \\ \frac{9}{11} & & \frac{7}{22} & & \frac{4}{11} & & \frac{3}{11} & & \frac{5}{11} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x_5 & \xrightarrow{f} & x_6=x_0 \\ \| & & \| \\ \frac{1}{11} & & \frac{9}{11} \end{array}$$

因此知 $9/11, 7/22, 4/11, 3/11, 5/11, 1/11\in A$.

最后我们由方程组

$$\begin{cases} x'_1=f(x'_0)=x'_0-1/2, x'_0\in[1/2,1], \\ x'_0=x'_{12}=f^{(11)}(x'_1)=g^{(11)}(x'_1) \\ \quad =(-2)^{11}(x'_1-1/3)+1/3, \end{cases}$$

解得 $x'_0=1138/1366$，$x'_1=455/1366$，从而得到 $f^{(12)}(x)=x$ 的 12 个解如下：

$$\begin{array}{ccccccccccc} x'_0 & \xrightarrow{f} & x'_1 & \xrightarrow{f} & x'_2 & \xrightarrow{f} & x'_3 & \xrightarrow{f} & x'_4 & \xrightarrow{f} \\ \| & & \| & & \| & & \| & & \| \\ \frac{1138}{1366} & & \frac{455}{1366} & & \frac{456}{1366} & & \frac{454}{1366} & & \frac{458}{1366} \end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x'_5 & \xrightarrow{f} & x'_6 & \xrightarrow{f} & x'_7 & \xrightarrow{f} & x'_8 & \xrightarrow{f} & x'_9 & \xrightarrow{f} \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| & \\
\frac{450}{1366} & & \frac{466}{1366} & & \frac{434}{1366} & & \frac{498}{1366} & & \frac{370}{1366} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
x'_{10} & \xrightarrow{f} & x'_{11} & \xrightarrow{f} & x'_{12} = x'_0 \\
\| & & \| & & \| \\
\frac{626}{1366} & & \frac{114}{1366} & & \frac{1138}{1366}
\end{array}
$$

它们都是 A 的元素.

这样我们构造性地找出了集合 A 中的 28 个元素因此证明了 A 至少有 28 个元素.

(张思明提供,陈剑刚校)

初等数学问题[1]（5）

1. 已知实数 a 满足：有且仅有一正方形，其四个顶点均在曲线 $y=x^3+ax$ 上，试求正方形的边长.

2. $\triangle ABC$ 的面积为 1，D，E 分别是边 AB，AC 上的点，BE，CD 相交于 P，并且四边形 $BCED$ 的面积是 $\triangle PBC$ 面积的两倍，求 $\triangle PDE$ 面积的最大值.

3. 设 f：$\mathbf{N}\longrightarrow\mathbf{N}$，并且对所有 $n\in\mathbf{N}$，有 $f(n+1)>f(n)$，$f(f(n))=3n$. 求 $f(1994)$.

4. 若干学校参加乒乓球比赛，同一学校的选手之间不比赛，不同学校的每两个选手都要比赛一场. 在两个男生或两个女生之间的比赛称为单打，一个男生和一个女生之间的比赛称为混合单打. 男生的人数与女生的人数至多相差 1，单打的场数和混合单打的场数也至多相差 1. 问有奇数个选手的学校至多有几个？

（翁立强选编，陈剑刚校）

---

① 这个专栏是由北京大学附中陈剑刚主持下编写的，每期都由具有丰富的中学数学教学经验的教师给出若干有趣味性的数学问题，在下一册给出这些问题的解答.

数学小丛书——智慧之花

（6）

主 要 目 录